R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 04

Ausgabedatum: 13. Mai 2022
Abgabedatum: 24. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (Wahr oder falsch – Zahlendarstellung und Rechnerarithmetik) 3.5 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Für jedes beliebige Fließkommagitter $\mathbb{F}$ mit $r, s \geqslant 1$ ist $1 \in \mathbb{F}$.

(ii) Es existiert ein Fließkommagitter $\mathbb{F}$ zur Basis $\beta = 2$, so dass $0.1 \in \mathbb{F}$ ist.

(iii) Die Basis $\beta = 10$ ist die kleinste Basis, zu der ein Fließkommagitter $\mathbb{F}$ existiert, so dass $0.2 \in \mathbb{F}$.

(iv) In jedem Fließkommagitter und für jede Rundungsfunktion gilt $x \odot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

(v) In jedem Fließkommagitter und für jede Rundungsfunktion ist $x \oplus y = y \oplus x$.

(vi) In jedem Fließkommagitter und für jede Rundungsfunktion ist $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

(vii) Für positive Zahlen $x, y, z \in \mathbb{F}$ in einem Fließkommagitter $\mathbb{F}$ mit $x \leqslant y$ und für jede Rundungsfunktion gilt $x \odot z \leqslant y \odot z$.

Hausaufgabe 2. (Experimentelle Bestimmung der Maschinengenauigkeit) 4 Punkte

(i) Gegeben sei ein Fließkommagitter $\mathbb{F}$ mit Basis $\beta = 2$, Mantissenlänge $r \geqslant 1$ und Exponentenlänge $s \geqslant 1$ mit round-to-nearest, ties-to-even Rundung.

(a) Bestimmen Sie die positiven Zahlen $a \in \mathbb{F} \setminus \{0, x_{\text{posmin}}\}$, für die eine größte Zahl $b \in \mathbb{R}_{>}$ existiert, so dass $\operatorname{rd}(a - b) = a$ und geben Sie b in Abhängigkeit von a an.

(b) Nutzen Sie Aufgabe (a) um ein numerisches Verfahren zu entwerfen, dass die Maschinengenauigkeit des Fließkommasystems bestimmt.

(ii) Implementieren Sie das Verfahren aus Aufgabe (i)(b) in Python (für IEEE 754 double precision) und vergleichen Sie Ihre Berechnung mit dem Wert für $\varepsilon_{\text{mach}}$ aus `numpy`. Müssen Sie bei Ihrer Implementierung auf Rundungsfehler achten?

Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Hausaufgabe 3. (Spanne der stärksten relativen Rundungsfehler) 3 Punkte

Es sei $\mathbb{F}$ ein Fließkommagitter, $\underline{x} < \overline{x}$ nebeneinander gelegene Fließkommazahlen aus $\mathbb{F}$, die entweder beide positiv oder beide negativ sind, und $x := \frac{1}{2}(\underline{x} + \overline{x})$. Zeigen Sie, dass bei round-to-nearest, ties-to-even Rundung

$$\frac{1}{2}\beta^{-r} \leqslant \frac{|x - \operatorname{rd}(x)|}{|x|} \leqslant \varepsilon_{\text{mach}} := \frac{1}{2}\beta^{1-r}$$

gilt. Was sagt Ihnen das Verhältnis der oberen und der unteren Schranke über die Wahl der Basis β in Fließkommasystemen?

Hausaufgabe 4. ("Grenzwert" der harmonischen Reihe) 3 Punkte

Wir wissen aus der Analysis der reellen Zahlen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Die folgende Aufgabe bezieht sich ausnahmslos auf das Single-Precision-System. Schreiben Sie ein Python-Programm, dass die Zahlen $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ "naiv" (aufsteigend in k) summiert und abbricht, wenn sich die Summe nicht mehr ändert.

Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(i) Welchen Wert hat die Summe, ab der sich der Wert nicht mehr ändert und wie viele Elemente konnten Sie aufsummieren?

(ii) Warum terminiert ihr Programm überhaupt?

(iii) Wie könnten Sie vorgehen, um diesen Effekt für die Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ zu verringern?

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.