R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 01

Ausgabedatum: 21. April 2022
Abgabedatum: 3. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (Eigenschaften der Operatornorm – Lemma 2.3) 6.5 Punkte

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$. In den Räumen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^\ell$ verwenden wir die Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ bzw. $\|\cdot\|_Z$. Beweisen Sie Lemma 2.3 aus dem Skript, also dass für die Operatornorm einer Matrix (Definition 2.2) folgende Eigenschaften gelten:

(i) Die Operatornorm ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(ii) $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to Y}\,\|x\|_X$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii)
$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y.$$

(iv)
$$\begin{aligned}\|A\|_{X\to Y} &= \inf\{c \geqslant 0 \mid \|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \min\{c \geqslant 0 \mid \|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

(v) $\|BA\|_{X\to Z} \leqslant \|B\|_{Y\to Z}\,\|A\|_{X\to Y}$.

Hausaufgabe 2. (Differenzierbarkeit und der Satz von Taylor) 8 Punkte

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1^2+x_2^2)\cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right), & (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$.

(b) Die partiellen Ableitungen von f sind nicht stetig bei $(0, 0)$.

(ii) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \in o(\|\Delta x\|_2)$,

(b) $f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^\mathsf{T} f''(x)\Delta x \in o(\|\Delta x\|_2^2)$

Hausaufgabe 3. (Landau-Notation und asymptotisches Verhalten) 9 Punkte

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $g, h \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ Funktionen und $\big(y^{(n)}\big), \big(z^{(n)}\big)$ $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$-wertige Folgen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmengen $O(g), o(g)$ der Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ bilden mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation reelle Vektorräume.

(ii) Die Teilmengen $O(y^{(n)}), o(y^{(n)})$ der reellen Folgen bilden mit der komponentenweise Addition und skalaren Multiplikation reelle Vektorräume.

Hausaufgabe 4. (Asymptotische Analyse) 4 Punkte

Gegeben ist der folgende Pseudocode für die Sortiermethode “Bubble sort” von n reellen Zahlen.

Algorithmus 0.1 (Bubble sort)**.**

Eingabe: *Array a von $n \geqslant 2$ reellen Zahlen.*

for $i = 0, 1, \dots, n-2$ ***do***
    for $j = 0, 1, \dots, n-2-i$ ***do***
        if $a[j] > a[j+1]$ ***then***
            Tausche $a[j]$ *und* $a[j+1]$
        end if
    end for
end for

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Vergleiche und die Anzahl der Tauschvorgänge im Algorithmus in Abhängigkeit der Anzahl n von zu sortierenden Elementen im schlechtesten und im besten Fall. Ordnen Sie den Algorithmus den entsprechenden Komplexitätsklassen in Landau-Notation zu.

(ii) Implementieren Sie Algorithmus 0.1 in Python und visualisieren Sie das asymptotische Verhalten der Vergleiche und der Tauschvorgänge für Beispiele mit Zufallszahlen. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab. Beschreiben Sie außerdem Ihre Beobachtungen.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.