R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 01

Ausgabedatum: 21. April 2022
Abgabedatum: 3. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (Eigenschaften der Operatornorm – Lemma 2.3) 6.5 Punkte

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$. In den Räumen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^\ell$ verwenden wir die Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ bzw. $\|\cdot\|_Z$. Beweisen Sie Lemma 2.3 aus dem Skript, also dass für die Operatornorm einer Matrix (Definition 2.2) folgende Eigenschaften gelten:

(i) Die Operatornorm ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(ii) $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|_{X\to Y}\,\|x\|_X$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii)
$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y.$$

(iv)
$$\begin{aligned}\|A\|_{X\to Y} &= \inf\{c \geqslant 0 \mid \|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \min\{c \geqslant 0 \mid \|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

(v) $\|BA\|_{X\to Z} \leqslant \|B\|_{Y\to Z}\,\|A\|_{X\to Y}$.

Lösung.

(i) Wir prüfen die Eigenschaften aus der Definition einer Norm für die Operatornorm nach (Definitheit, positive Homogenität, Subadditivität)

(a) Für die Nullmatrix gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \|\mathbf{0}x\|_Y/\|x\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} 0 = 0.$$

außerdem ist

$$0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \|\mathbf{A}x\|_Y/\|x\|_X \quad\Leftrightarrow\quad \|\mathbf{A}x\|_Y = 0\,\forall x\in\mathbb{R}^n \quad\Leftrightarrow\quad Ax = 0\,\forall x\in\mathbb{R}^n \quad\Leftrightarrow\quad A = 0,$$

damit gilt die Definitheit. (0.5 Punkte)

(b) Es seien nun A aus $\mathbb{R}^{m,n}$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ gegeben. Dann ist

$$\|\alpha A\|_{X\to Y} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \|\alpha Ax\|_Y/\|x\|_X = |\alpha| \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \|Ax\|_Y/\|x\|_X = |\alpha|\|A\|_{X\to Y},$$

was die positive Homogenität zeigt. (0.5 Punkte)

(c) Es seien nun A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{R}^{m,n}$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}\|A+\tilde{A}\|_{X\to Y} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax+\tilde{A}x\|_Y}{\|x\|_X}\\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} + \frac{\|\tilde{A}x\|_Y}{\|x\|_X}\\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\tilde{A}x\|_Y}{\|x\|_X}\\ &= \|A\|_{X\to Y} + \|\tilde{A}\|_{X\to Y},\end{aligned}$$

was die Subadditivität zeigt. (0.5 Punkte)

(ii) Für $x = 0$ gilt die Aussage offensichtlich. Für jedes andere $x\in\mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\|_{X\to Y}$$

und Multiplikation mit $\|x\|_X$ liefert sofort die Aussage. (1 Punkt)

(iii) Es ist

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \left\|A\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, weil die Abbildung $x \mapsto \|Ax\|_Y$ eine stetige Abbildung zwischen $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist und die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_X = 1\}$ kompakt ist, weshalb nach dem Satz von Weierstraß das Supremum angenommen wird. (1.5 Punkte)

(*iv*) Wir setzen $C := \{c \geqslant 0 \mid \|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$. Dann existiert $\inf C \geqslant 0$. Auf Grund von Aussage (*ii*) ist außerdem $\|A\|_{X\to Y} \in C$ und damit $\inf C \leqslant \|A\|_{X\to Y}$. (0.5 Punkte)

Für jedes $c \in C$ ist außerdem

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant c \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Ungleichung gilt entsprechend auch für das Supremum über alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und wir erhalten sofort, dass

$$\|A\|_{X\to Y} \leqslant c \qquad \text{für alle } c \in C$$

und somit auch

$$\|A\|_{X\to Y} \leqslant \inf C.$$

Damit ist $\|A\|_{X\to Y} = \inf C$ und das Infimum offensichtlich ein Minimum. (1 Punkt)

(*v*) Es ist auf Grund von Aussage (*ii*):

$$\begin{aligned} \|BA\|_{X\to Z} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|BAx\|_Z}{\|x\|_X} \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|B\|_{Y\to Z}\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \|B\|_{Y\to Z}\|A\|_{X\to Y} \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Hausaufgabe 2. (Differenzierbarkeit und der Satz von Taylor) 8 Punkte

(*i*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$.

(b) Die partiellen Ableitungen von f sind nicht stetig bei $(0,0)$.

(ii) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \in o(\|\Delta x\|_2)$,

(b) $f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^\top f''(x)\Delta x \in o(\|\Delta x\|_2^2)$

Lösung.

(i) (a) Für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ sind

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1} f(x_1,x_2) &= 2x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right) - (x_1^2+x_2^2)\sin\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{-2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\
&= 2x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}\sin\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right), \\
\partial_{x_2} f(x_1,x_2) &= 2x_2 \cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right) - (x_1^2+x_2^2)\sin\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{-2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\
&= 2x_2 \cos\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right).
\end{aligned}
$$

(1 Punkt)

Diese partiellen Ableitungen sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und damit ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar. (1 Punkt)

Die partiellen Ableitungen bei $(0,0)$ sind

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} t\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0, \\
\partial_{x_2} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} t\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

da $|\cos| \leqslant 1$. (1 Punkt)

Der Kandidat für die Ableitung von f bei $(0,0)$ ist also $f'(0,0) = 0$. Dieser ist tatsächlich die Fréchet-Ableitung von f bei $(0,0)$, denn es ist

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0,0)}{\|\Delta x\|_2} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)\cos\left(\frac{1}{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}\right)}{\|\Delta x\|_2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \|\Delta x\|_2 \cos\left(\frac{1}{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Die partiellen Ableitungen von f sind nicht stetig bei $(0,0)$, da

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}, 0\right) = \partial_{x_2} f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \not\to 0\end{aligned}$$

für $n \longrightarrow \infty$. (1 Punkt)

(ii) (a) Für das Taylorpolynom erster Ordnung ist die Aussage genau die Definition der Differenzierbarkeit für eine konkrete Norm (siehe auch Quizfrage im Skript).

(b) Für das Taylorpolynom zweiter Ordnung existiert nach Satz 2.10 ein $\xi \in [0,1]$, so dass

$$\begin{aligned}&\left| f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^\intercal f''(x)\Delta x \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}\Delta x^\intercal f''(x + \xi\Delta x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x^\intercal f''(x)\Delta x \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}\Delta x^\intercal (f''(x + \xi\Delta x) - f''(x))\Delta x \right| \\ &= \frac{1}{2}\left| \Delta x^\intercal (f''(x + \xi\Delta x) - f''(x))\Delta x \right| \\ &\le \frac{1}{2} \|f''(x + \xi\Delta x) - f''(x)\|_{2\to 2} \|\Delta x\|_2^2 \\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{n}\, \|f''(x + \xi\Delta x) - f''(x)\|_{\infty\to\infty} \|\Delta x\|_2^2\end{aligned}$$

wobei für den Wechsel auf die Norm $\|\cdot\|_{\infty\to\infty}$ die Normabschätzungen aus Gleichung (2.1) im Skript verwendet wurde. (1.5 Punkte)

Diesen Wechsel haben wir durchgeführt, denn Anhand der Darstellung von $\|\cdot\|_\infty$ als Zeilensummennorm (Gleichung (2.3c)) sehen wir sofort, dass

$$\|f''(x+\xi\Delta x) - f''(x)\|_{\infty\to\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f(x+\xi\Delta x)}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} \right| \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0,$$

was in der $2 \to 2$-Norm (Spektralnorm der Jacobimatrix) nicht sofort ersichtlich gewesen wäre. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 3. (Landau-Notation und asymptotisches Verhalten) 9 Punkte

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $g, h \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ Funktionen und $\big(y^{(n)}\big), \big(z^{(n)}\big)$ $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$-wertige Folgen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmengen $O(g), o(g)$ der Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ bilden mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation reelle Vektorräume.

(ii) Die Teilmengen $O(y^{(n)}), o(y^{(n)})$ der reellen Folgen bilden mit der komponentenweise Addition und skalaren Multiplikation reelle Vektorräume.

Lösung.

Zur Erinnerung: Es ist bei allen asymptotischen Untersuchungen im Folgenden unwesentlich, welche Norm im $\mathbb{R}^m$ gewählt wird.

Außerdem: Um zu zeigen, dass eine Menge V mit Vektoraddition und skalarer Multiplikation über einem Körper K einen Vektorraum bildet, sind die folgenden Eigenschaften nachzuprüfen:

(1) Wohldefiniertheit der Vektoraddition: Für $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 + v_2 \in V$.

(2) Wohldefiniertheit der skalaren Multiplikation: Für $v \in V$, $\alpha \in K$ ist $\alpha v \in V$.

(3) Zur Addition:

  (a) Assoziativgesetz: Für $v_1, v_2, v_3 \in V$ ist $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.

  (b) Neutrales Element: Es gibt $0 \in V$ mit $0 + v = v$ für alle $v \in V$.

  (c) Inverses Element: Für jedes $v \in V$ gibt es $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

(d) Kommutativgesetz: Für $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

(4) Zur Multiplikation:

(a) Distributivgesetz 1: Für $\alpha \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ ist $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.

(b) Distributivgesetz 2: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und $v \in V$ ist $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$.

(c) Einselements: Es gibt $1 \in K$, so dass $1v = v$ für alle $v \in V$.

(d) Assoziativgesetz: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ und $v \in V$ ist $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)v = \alpha_1(\alpha_2 v)$.

Bedingung (3) – Bedingungen (a) und (d) und Bedingung (4) –Bedingungen (a) bis (d) lassen sich direkt vom Vektorraum der Funktionen/Folgen bzw. aus den jeweiligen punktweisen/komponentenweisen Rechenregeln in $\mathbb{R}$ übertragen. Es verbleiben also nur die Wohldefiniertheitsaussagen Bedingungen (1) und (2) und die Existenz des neutralen (Bedingung (3) (b)) und des inversen Elements (Bedingung (3) (c)) zu untersuchen. (1 Punkt)

(i) Wir beginnen mit der Menge $O(g)$: Zu Bedingung (1): Es seien $F, \tilde{F} \in O(g)$. Per Definition existieren $C, \tilde{C} \geqslant 0$ und $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, so dass

$$\|F(x)\| \leqslant C\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \varepsilon)$$
$$\|\tilde{F}(x)\| \leqslant \tilde{C}\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \tilde{\varepsilon}).$$

Entsprechend ist

$$\|F(x) + \tilde{F}(x)\| \leqslant \|F(x)\| + \|\tilde{F}(x)\| \leqslant \underbrace{(C + \tilde{C})}_{\geqslant 0} g(x) \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \underbrace{\min(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})}_{>0})$$

und damit $F + \tilde{F} \in O(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (2): Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $F \in O(g)$. Per Definition existiert $C \geqslant 0$, so dass

$$\|F(x)\| \leqslant C\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \varepsilon).$$

Entsprechend ist

$$\|\alpha F\| = |\alpha|\|F\| \leqslant (\underbrace{|\alpha| C}_{\geqslant 0})g(x) \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \varepsilon)$$

und damit $\alpha F \in O(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (b) (neutrales Element): Das neutrale Element der punktweisen Addition (die konstante Nullfunktion) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $\mathcal{O}(g)$ für jedes $C \geqslant 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ und liegt damit in $\mathcal{O}(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (c) (inverses Element): Das inverse Element der punktweisen Addition für eine Funktion $F \in \mathcal{O}(g)$ (die Funktion $-F$) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $o(g)$ für die gleichen $C \geqslant 0$ und jedes $\varepsilon > 0$, mit denen F die Bedingung erfüllt, denn es ist $\|-F\| = \|F\|$. Damit liegt $-F$ in $\mathcal{O}(g)$. (0.5 Punkte)

Zur Menge $o(g)$: Zu Bedingung (1): Es seien $F, \tilde{F} \in o(g)$. Per Definition existieren zu jedem $c > 0$ Zahlen $\varepsilon(c), \tilde{\varepsilon}(c) > 0$, so dass

$$\|F(x)\| \leqslant c\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \varepsilon(c)),$$
$$\|\tilde{F}(x)\| \leqslant c\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \tilde{\varepsilon}(c)).$$

Entsprechend ist

$$\|F(x) + \tilde{F}(x)\| \leqslant \|F(x)\| + \|\tilde{F}(x)\| \leqslant \underbrace{(c/2 + c/2)}_{=c} g(x) \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \underbrace{\min(\varepsilon(c/2), \tilde{\varepsilon}(c/2))}_{\varepsilon_+(c):=})$$

und damit $F + \tilde{F} \in o(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (2): Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $F \in o(g)$. Per Definition existiert für jedes $c > 0$ ein $\varepsilon(c) > 0$, so dass

$$\|F(x)\| \leqslant c\, g(x)\ \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \varepsilon(c)).$$

Entsprechend ist für $\alpha \neq 0$ auch

$$\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\| \leqslant \underbrace{(|\alpha| \frac{c}{|\alpha|})}_{=c} g(x) \leqslant \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \in (0, \underbrace{\varepsilon(c/|\alpha|)}_{\varepsilon_\cdot(c):=})$$

und damit gilt $\alpha F \in o(g)$. Für $\alpha = 0$ verschwindet die Funktion αF und ist damit ebenfalls in $o(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (b) (neutrales Element): Das neutrale Element der punktweisen Addition (die konstante Nullfunktion) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $o(g)$ für jedes $c > 0$ mit beliebigem $\varepsilon(c) > 0$ und liegt damit in $o(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (c) (inverses Element): Das inverse Element der punktweisen Addition für eine Funktion $f \in o(g)$ (die Funktion $-f$) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $o(g)$ für die gleichen $\varepsilon(c) > 0$, mit denen f die Bedingung erfüllt, denn es ist $\|-f\| = \|f\|$. Damit liegt $-f$ in $o(g)$. (0.5 Punkte)

(ii) Wir beginnen mit der Menge $\mathcal{O}(y^{(n)})$: Zu Bedingung (1): Es seien $(x^{(n)}), (\tilde{x}^{(n)}) \in \mathcal{O}(y^{(n)})$. Per Definition existieren $C, \tilde{C} \geqslant 0$ und $n_0, \tilde{n}_0 > 0$, so dass

$$\|x^{(n)}\| \leqslant C\, y^{(n)} \ \forall n \geqslant n_0$$
$$\|\tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \tilde{C}\, y^{(n)} \ \forall n \geqslant \tilde{n}_0.$$

Entsprechend ist

$$\|x^{(n)} + \tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \|x^{(n)}\| + \|\tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \underbrace{(C + \tilde{C})}_{\geqslant 0}\, y^{(n)} \quad \forall n \geqslant \underbrace{\max(n_0, \tilde{n}_0)}_{n_{0,+} :=})$$

und damit $x^{(n)} + \tilde{x}^{(n)} \in \mathcal{O}(y^{(n)})$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (2): Es seien $\alpha \in K$ und $(\tilde{x}^{(n)}) \in \mathcal{O}(y^{(n)})$. Per Definition existieren $C \geqslant 0$ und $n_0 > 0$, so dass

$$\|x^{(n)}\| \leqslant C\, y^{(n)} \ \forall n \geqslant n_0$$

Entsprechend ist

$$\|\alpha x^{(n)}\| \leqslant |\alpha| \|x^{(n)}\| \leqslant \underbrace{|\alpha| C}_{\geqslant 0}\ y^{(n)} \quad \forall n \geqslant n_0$$

und damit $(\alpha x^{(n)}) \in \mathcal{O}(y^{(n)})$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (b) (neutrales Element): Das neutrale Element der komponentenweise Addition (die konstante Nullfolge) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $\mathcal{O}(y^{(n)})$ für jedes $C > 0$ mit beliebigem $n_0 > 0$ und liegt damit in $\mathcal{O}(y^{(n)})$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (c) (inverses Element): Das inverse Element der komponentenweise Addition für eine Folge $(x^{(n)}) \in \mathcal{O}(y^{(n)})$ (die Folge $(-x^{(n)})$) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $\mathcal{O}(y^{(n)})$ für die gleichen Konstante C und $n_0 > 0$, mit denen $(x^{(n)})$ die Bedingung erfüllt, denn es ist $\|-x^{(n)}\| = \|x^{(n)}\|$. (0.5 Punkte)

(iii) Zur Menge $o(y^{(n)})$: Zu Bedingung (1): Es seien $(x^{(n)}), (\tilde{x}^{(n)}) \in o(y^{(n)})$. Per Definition existieren für jedes $c > 0$ und Zahlen $n_0(c), \tilde{n}_0(c) > 0$, so dass

$$\|x^{(n)}\| \leqslant c\, y^{(n)} \ \forall n \geqslant n_0$$
$$\|\tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \tilde{c}\, y^{(n)} \ \forall n \geqslant \tilde{n}_0.$$

Entsprechend ist

$$\|x^{(n)} + \tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \|x^{(n)}\| + \|\tilde{x}^{(n)}\| \leqslant \underbrace{\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right)}_{=c} y^{(n)} \quad \forall n \geqslant \underbrace{\max(n_0(c/2), \tilde{n}_0(c/2))}_{n_{0,+}(c) :=})$$

und damit $x^{(n)} + \tilde{x}^{(n)} \in o(y^{(n)})$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (2): Es seien $\alpha \in K$ und $(\tilde{x}^{(n)}) \in o(y^{(n)})$. Per Definition existiert zu jedem $c > 0$ ein $n_0(c) > 0$, so dass

$$\|x^{(n)}\| \leqslant c\, y^{(n)}\ \forall n \geqslant n_0(c)$$

Entsprechend ist für jedes $\alpha \neq 0$

$$\|\alpha x^{(n)}\| \leqslant |\alpha| \|x^{(n)}\| \leqslant \underbrace{|\alpha| \frac{c}{|\alpha|}}_{=c} y^{(n)} \quad \forall n \geqslant n_0(c/|\alpha|)$$

und damit $(\alpha x^{(n)}) \in o(y^{(n)})$. Für $\alpha = 0$ ist die Folge $\alpha x^{(n)}$ die konstante Nullfolge und damit ebenfalls in $o(g)$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (b) (neutrales Element): Das neutrale Element der komponentenweise Addition (die konstante Nullfolge) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $o(y^{(n)})$ mit beliebigem $n_0 > 0$ und liegt damit in $o(y^{(n)})$. (0.5 Punkte)

Zu Bedingung (3) (c) (inverses Element): Das inverse Element der komponentenweise Addition für eine Folge $(x^{(n)}) \in O(y^{(n)})$ (die Folge $(-x^{(n)})$) erfüllt die Bedingung aus der Definition von $O(y^{(n)})$ für die gleichen Konstante C und $n_0 > 0$, mit denen $(x^{(n)})$ die Bedingung erfüllt, denn es ist $\|-x^{(n)}\| = \|x^{(n)}\|$. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 4. (Asymptotische Analyse) 4 Punkte

Gegeben ist der folgende Pseudocode für die Sortiermethode “Bubble sort” von n reellen Zahlen.

Algorithmus 0.1 (Bubble sort).

Eingabe: *Array a von $n \geqslant 2$ reellen Zahlen.*

```
for i = 0, 1, ..., n − 2 do
    for j = 0, 1, ..., n − 2 − i do
        if a[j] > a[j + 1] then
            Tausche a[j] und a[j + 1]
        end if
    end for
end for
```

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Vergleiche und die Anzahl der Tauschvorgänge im Algorithmus in Abhängigkeit der Anzahl n von zu sortierenden Elementen im schlechtesten und im besten

Fall. Ordnen Sie den Algorithmus den entsprechenden Komplexitätsklassen in Landau-Notation zu.

(ii) Implementieren Sie Algorithmus 0.1 in Python und visualisieren Sie das asymptotische Verhalten der Vergleiche und der Tauschvorgänge für Beispiele mit Zufallszahlen. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab. Beschreiben Sie außerdem Ihre Beobachtungen.

Lösung.

Code hierzu: driver_ex_004_bubble_sort.py.

(i) Wie man direkt an dem Pseudocode erkennen kann durchläuft der Algorithmus unabhängig von den vorliegenden Zahlen beide Schleifen und führt alle Vergleiche aus. Für die Vergleiche fallen also best-, worst- und average case zusammen und es werden für jeden der Durchläufe $i \in \{0, \dots, n-2\}$ auch $n-1-i$ Vergleiche durchgeführt. Das sind also $\sum_{i=0}^{n-2} n-1-i = \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2 \in \mathcal{O}(n^2)$ Vergleiche. (1 Punkt)

Für die Anzahl der Tauschvorgänge macht die ursprüngliche Reihenfolge der Zahlen allerdings einen Unterschied. Im best-case sind die Zahlen schon sortiert und es werden nur die Vergleiche aber $0 \in \mathcal{O}(1)$ Vertauschungen durchgeführt. Im worst-case hingegen sind die Zahlen genau falschrum sortiert, dann wird für jeden Vergleich auch ein Tausch durchgeführt und man erhält wieder $n(n-1)/2 \in \mathcal{O}(n^2)$ Vertauschungen. (1 Punkt)

(ii) Wie erwartet werden immer alle Vergleiche ausgeführt, bei den Vertauschungen tritt der worst-case in unserem Zufallssetting nie ein, das asymptotische Verhalten scheint aber auch im average case quadratisch zu sein . (2 Punkte)

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.

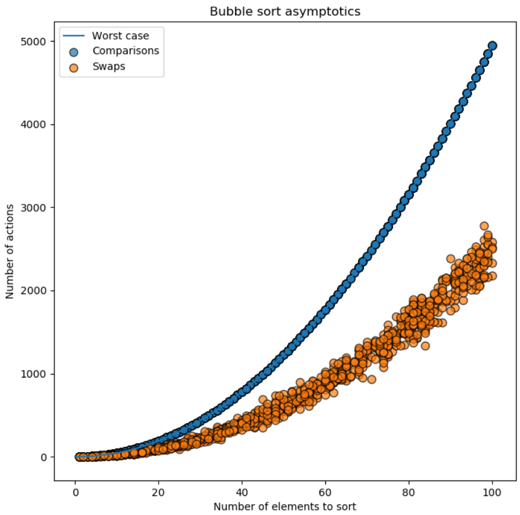

Abbildung 0.1: Asymptotisches Verhalten des Bubble sort Algorithmus.