Lineare Algebra II

Woche 08

02.06.2026

Kapitel 8 Normalformen von Endomorphismen

§ 32 Darstellungsmatrizen von Endomorphismen

Satz 32.1 vgl. Beispiel 29.33

Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

1. Die Zuordnung

zweimal dieselbe Basis

$$\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V} : (\operatorname{Endo}(V), +, \cdot, \circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \in (K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$$

eines Endomorphismus zu seiner Darstellungsmatrix ist ein Isomorphismus von Algebren mit Eins.

$$f+g \mapsto A+B$$
$$\alpha f \mapsto \alpha A$$
$$f \circ g \mapsto A \cdot B$$
$$\mathrm{id}_V \mapsto I_n$$

Satz 32.1 vgl. Beispiel 29.33

Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

2. Die Abbildung

$$\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V} : (\mathrm{Auto}(V), \circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \in (\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$$

bildet außerdem die Untergruppe $\mathrm{Auto}(V)$ bijektiv auf die Untergruppe $\mathrm{GL}(n, K)$ ab.

invertierbar $\mapsto$ invertierbar
(Automor.) (inv. Matrizen)

wie in jedem Homo von Monoiden

alt neu

Satz 32.2

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basen B_V und $\widehat{B}_V$.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $f \colon V \to V$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V \leftarrow \widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V \leftarrow B_V} \; \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \; \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \; A \; T$$

vgl. allgemeine Homo: $\hat{A} = S^{-1} A \, T$

Äquivalenztrafo

Ähnlichkeitstransformation

Definition 32.3

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T^{-1} A T.$$

Der Übergang von A zu $T^{-1} A T$ heißt **Ähnlichkeitstransformation**.

Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

Bedeutung ähnlicher Matrizen

Satz 32.4

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$.

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind ähnliche Matrizen.
2. Ist V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$ und Basis B_V, ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und gilt $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$, dann gibt es eine Basis $\widehat{B}_V$ von V, sodass $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V \leftarrow \widehat{B}_V}(f)$ gilt.

Ähnliche Matrizen stellen denselben Endomorphismus bzgl. unterschiedlicher Basen dar.

Fragen zur Ähnlichkeitsrelation

1. Welche Eigenschaften sorgen dafür, dass zwei Matrizen bzgl. der Ähnlichkeitsrelation in derselben Äquivalenzklasse liegen?

2. Was bedeuten diese Eigenschaften für den zugrundeliegenden Endomorphismus?

3. Wie finden wir in einer Äquivalenzklasse von ähnlichen Matrizen Repräsentanten von möglichst einfacher Gestalt, die wir als Normalform verwenden können?

bei Homomorphismen

Rang-Normal-form $\begin{array}{cc} n & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \\ & m \end{array}$

Definition 32.5

Es sei K ein Körper.

1. Es seien V ein Vektorraum über K und $f \in \mathrm{Endo}(V)$.

   Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt f-**invariant** (f-stabil), wenn gilt:

   $f(U) \subseteq U$ d.h. $f(u) \in U \ \forall u \in U$ d.h. $f|_U^U$ ist definiert

2. Es $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   Ein Unterraum $U \subseteq K^n$ heißt A-**invariant** (A-stabil), wenn gilt:

   $f_A(U) \subseteq U$ d.h. $Ax \in U \ \forall x \in U$

Beispiel 32.6

1. In jedem Vektorraum V sind die trivialen Unterräume $\{0\}$ und V invariante Unterräume für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$.

$f(0) = 0$

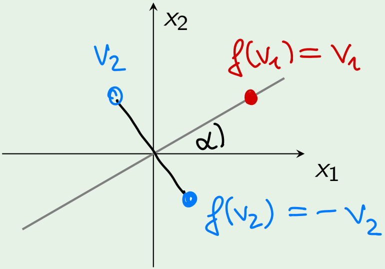
$f(V) \subseteq V$

nicht informativ!

Beispiel 32.6

$V = \mathbb{R}^2$

2. Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\mathbb{R}^2$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beispiel 32.6

3. Für die Ableitungsabbildung als Endomorphismus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \colon K[t] \to K[t]$ im Fall eines Körpers K mit $\operatorname{char}(K) = 0$ sind die $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$-invarianten Unterräume genau die Unterräume von der Form

$\langle 1, t, t^2, \ldots, t^k \rangle = K_k[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. Nullraum

bzw. ganz $K[t]$

Falls U das Poly $p = t^k$ enthält, dann

$\frac{d}{dt} p = k\, t^{k-1}$ usw.

Was bringen f-invariante Unterräume?

- V sei endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \geqslant 2$
- $f\colon V \to V$ sei ein Endomorphismus
- $U \subseteq V$ sei ein f-invarianter Unterraum mit $\dim(U) = k$ und $1 \leqslant k \leqslant n-1$ und $W \subseteq V$ ein zu U komplementärer Unterraum

Bezüglich einer Basis der Form $B_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{v_{k+1}, \ldots, v_n}_{\text{Basis von } W})$ hat f die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{oder sogar } \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

$f(U) \subseteq U$

blockdiag!

auch $f(W) \subseteq W$

Blockdiagonalgestalt der Darstellungsmatrix eines Endom.

Satz 32.7

Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f \in \operatorname{Endo}(V)$ und $L \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

1. Es existieren f-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_L$, sodass gilt:

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_L$$

Dim. $n_1 + \cdots + n_L$

2. Es existiert eine Basis B_V von V, sodass die Darstellungsmatrix von f **Blockdiagonalgestalt** besitzt:

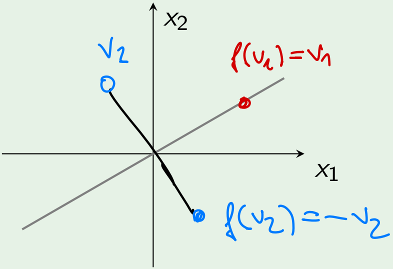
$$\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_L \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & & & \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{LL}} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_L \end{array} \end{array}$$

Basis

$B_V = B_{U_1} \| \cdots \| B_{U_L}$

Beispiel 32.8

Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\mathbb{R}^2$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



$$\mathbb{R}^2 = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$$

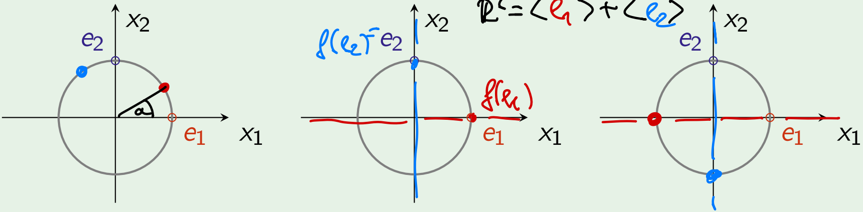
$$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 32.8

Die Drehungsabbildung auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ dreht jeden Vektor um den Winkel α um den Ursprung (Nullvektor). Sie besitzt nicht-triviale invariante Unterräume nur für die speziellen Werte

$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle$



$\alpha = 0$ | $\alpha = \pi$

$\alpha = 2k\pi$ | $\alpha = (2k+1)\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ | $k \in \mathbb{Z}$

§ 33 Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen

Was bedeutet der Extremfall eines eindimensionalen f-invarianten Unterraums $U \subseteq V$?

$U = \langle v \rangle$ mit $v \neq 0$

$f(U) \subseteq U$ bedeutet: $f(v)$ ist Vielfaches von v

$\boxed{f(v) = \lambda v}$ mit $\lambda \in K$

Eigenwert, Eigenvektor eines Endomorphismus

Definition 33.1

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

   EV EW

   Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **des Endomorphismus** f, wenn gilt:

   $\langle v \rangle$ ist f-invariant

   (λ, v) Eigenpaar

   $$f(v) = \lambda\, v$$

2. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn gilt:

   (λ, x) Eigenpaar

   $\langle x \rangle$ ist A-invariant

   $$A\,x = \lambda\, x$$

Eigenpaare von Endomorphismen und Darstellungsmatrizen

Darst. matrix bzgl. beliebiger Basis

Lemma 33.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f \in \operatorname{Endo}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A.

Weiter gilt:

3. Ist (λ, v) ein Eigenpaar von f, dann ist (λ, x) ein Eigenpaar von A für $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$.
4. Ist (λ, x) ein Eigenpaar von $\cancel{f}$ A, dann ist (λ, v) ein Eigenpaar von f für $v = \Phi_{B_V}(x)$.

Fazit: Wir können EW und EV eines Endomor. anhand einer beliebigen Darst.matrix bestimmen.

Eigenpaare ähnlicher Matrizen

stellen denselben Endo dar!

Folgerung 33.3

Es sei $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ Matrizen mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn A und $\widehat{A}$ ähnlich sind, dann besitzen sie dieselben Eigenwerte.

Die Umkehrung von Folgerung 33.3 gilt nicht!

Beispiel 33.4

Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzen beide $\underbrace{\text{nur den Eigenwert } \lambda = 1}_{\text{Beweis später}}$, sie sind aber nicht ähnlich zueinander.

Eigenwerte sagen nicht alles über einen Endo aus!

§ 33.1 Bestimmung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert

Charakterisierung von Eigenpaaren

für Endomorphismen

$$f(v) = \lambda\, v$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\, v - f(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda\, \mathrm{id}_V - f)(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{Kern}(\lambda\, \mathrm{id}_V - f)$$

$$= \operatorname{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$$

$\lambda \in K$ ist Eigenwert von f genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(\lambda\, \mathrm{id}_V - f)$ mehr als nur $\{0\}$ enthält.

für Matrizen

$$Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda x - Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda I - A)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \operatorname{Kern}(\lambda I - A)$$

$$= \operatorname{Kern}(A - \lambda I)$$

$\lambda \in K$ ist EW von A gdw. $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)$ mehr als $\{0\}$ enthält.

Eigenraum, geometrische Vielfachheit

nicht notwendig ein EW

Definition 33.5

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Ist $f \in \mathrm{Endo}(V)$ und $\lambda \in K$, dann heißen

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda\, v\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(f,\lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$$

der **Eigenraum** von f zu λ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von λ.

λ ist EW von f $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\mu^{geo}(f,\lambda) \geq 1$

2. Ist $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) := \{x \in \overset{K^n}{\cancel{V}} \mid A x = \lambda x\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(A,\lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(A,\lambda))$$

der **Eigenraum** von A zu λ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von λ.

Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen

Lemma 33.6

Es seien V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{Endo}(V)$ sowie $\lambda \in K$.

1. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_V - f)$ ist ein Unterraum von V.
2. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $f \Leftrightarrow \mu^{\text{geo}}(f, \lambda) > 0$.
3. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die (evtl. leere) Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
4. Sind $s \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(f, \lambda_s)$ direkt.

Lemma 33.8

1. Es seien V ein Vektorraum und $f \in \mathrm{Endo}(V)$. Dann gilt:
   a. f ist injektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von f.
   b. Ist V endlich-dimensional, dann gilt sogar:
      f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von f.
2. Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

   A ist regulär $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von A.

Beweis: ① f injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(0 \cdot \mathrm{id}_V - f) = \{0\}$
$\Leftrightarrow$ 0 ist <u>kein</u> EW von f
$\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$: injektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv

Beispiel 33.9

1. Der Eigenraum der Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist gegeben durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\overset{A-\lambda I}{\begin{bmatrix}1-1 & 0\\ 0 & 1-1\end{bmatrix}} \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \text{kurz:} \quad \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Die Lösungsmenge ist hier

$$\operatorname{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{Q}^2$$

$$\mu^{geo}(A, 1) = 2$$

Bestimmung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert

Beispiel 33.9

2. Der Eigenraum der Matrix $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist gegeben durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{bmatrix}}_{B - \lambda I} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz:} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die Lösungsmenge ist hier also

$$\operatorname{Eig}(B, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mu^{geo}(B, 1) = 1$$

Es gibt hier keine Basis aus lauter EV.