Lineare Algebra II

Woche 05

11.05.2026 und 12.05.2026

§ 27 Determinanten

Vorschau

Wir betrachten einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Die Determinante ist eine Maßzahl für Endomorphismen $f \in \operatorname{Endo}(V)$.

- Wir definieren Determinantenformen auf $V^n = V \times \cdots \times V$.
- Wir definieren die Determinante für Matrizen in $K^{n \times n}$.
- Wir übertragen den Begriff der Determinante mit Hilfe von Darstellungsmatrizen auf Endomorphismen $f \in \operatorname{Endo}(V)$.

Determinantenformen

Definition 27.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Eine alternierende Multilinearform $\Delta \in \operatorname{Mult}(V^n; K)$

$$\Delta\colon V^n \ni (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V.

Determinantenformen

Bemerkung 27.2

1. $(v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig $\quad \Rightarrow \quad \Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$

2. $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha\, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$

3. $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha\, v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$

4. $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$

Determinantenformen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mult}(V^n; K) & \cong & V^{*\otimes n} \\ \text{Unterraum der alternie-renden Multilinearformen} & \cong & V^{*\otimes n}_{\text{alt}} \end{array}$$

- $\dim(V^{*\otimes n}_{\text{alt}}) = \binom{n}{n} = 1$
- Eine Determinantenform Δ wird bereits durch einen einzigen Funktionswert $\Delta(b_1, \ldots, b_n)$ eindeutig festgelegt.
- Für zwei verschiedene Determinantenformen gilt, dass eine ein skalares Vielfaches der anderen ist.

Gestalt von Determinantenformen

Satz 27.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die zugehörige duale Basis.

1. Die Determinantenformen Δ auf V sind genau die Tensoren in $V^{*\otimes n}$ der Gestalt

$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, b^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes b^*_{\sigma(n)}$$

   Die Zuordnung $V^{*\otimes n}_{\text{alt}} \ni \Delta \mapsto \alpha \in K$ ist ein Isomorphismus.

vgl. Beispiel 26.7: Komp.hypermatrix bzgl. $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ $\quad n = 3$

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha \\ \cdot & -\alpha & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \alpha & \cdot \\ -\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Gestalt von Determinantenformen

$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \, b^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes b^*_{\sigma(n)}$$

Beweis.

Auswertung von Determinantenformen

Satz 27.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die zugehörige duale Basis.

2. Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ beliebig mit $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i$, dann gilt

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n)$$

Auswertung von Determinantenformen

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i \quad \Rightarrow \quad \Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n)$$

Beweis.

§ 27.1 Die Determinante einer Matrix

die Determinante einer Matrix

Haben die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Darstellung $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i$ bzgl. der Basis $(b_1, \ldots, b_n)$, dann gilt

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big) \underbrace{\Delta(b_1, \ldots, b_n)}_{\text{Normierungswert}}$$

Definition 27.5

Die **Determinante** von $A \in K^{n \times n}$ ist definiert als

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Diese Darstellung heißt die **Leibniz-Formel**.

die Determinante einer Matrix

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Beispiel 27.7

1. Im Fall $n = 0$ gilt für $A = [\,]$
2. Im Fall $n = 1$ gilt für $A = [a]$
3. Im Fall $n = 2$ gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Beispiel 27.7

3. Im Fall $n = 3$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} \\ - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} \end{array}$$

Regel von Sarrus

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ von A.
2. $\det(\alpha\, A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.

Beweis.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

3. $\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B)$.
4. $\det(I) = 1$.

Beweis.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

5. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$
   $\Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.
6. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.
7. $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$.

Beweis.

§ 27.2 Berechnung der Determinante

Determinante einer (Block-)Dreiecksmatrix

Lemma 27.9

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt
$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$
2. Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$
dann gilt
$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Beweis. Übung

Determinante von Elementarmatrizen

Ziel: $\det(A)$ bestimmen durch Transformation von A auf Zeilenstufenform (obere Dreiecksmatrix) durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links.

Lemma 27.10 Typ I

$$\text{Für } D_i(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(D_i(\alpha)) =$$

Lemma 27.10 Typ II

$$\text{Für } S_{i,j}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \alpha & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(S_{i,j}(\alpha)) =$$

Lemma 27.10 Typ III

Für $T_{i,j} :=$

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

gilt $\det(T_{i,j}) =$

Beispiel 27.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Determinante durch Zeilenoperationen

Beispiel 27.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Streichungsmatrix

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Die **Streichungsmatrix** von A bzgl. (i, j) ist

$$(A)_{\neq i, \neq j} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Minor/Unterdeterminante

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Der **Minor** oder die **Unterdeterminante** von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

$$[A]_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \text{---} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{---} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{---} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{---} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \text{---} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{---} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{---} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{---} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix und Adjunkte

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Die Größe
$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \, [A]_{ij}$$
heißt der **Kofaktor** der Matrix A bzgl. des Index (i, j).

   Die Matrix $\operatorname{cof}(A) := (\widetilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ heißt die **Kofaktormatrix** von A.

4. Die **Adjunkte** von A oder die zu A **komplementäre Matrix** ist die Transponierte der Kofaktormatrix:
$$\operatorname{adj}(A) := \operatorname{cof}(A)^\mathsf{T}$$

5. Im Fall $n = 0$ ist $A = [\,] = \operatorname{cof}(A) = \operatorname{adj}(A)$.

alternative Definition der Kofaktoren

Lemma 27.13

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\widetilde{a}_{ij} = \det \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Ersetze die j-te Spalte durch e_i.

Beispiel 27.14

Was sind die Kofaktoren der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$?

$$\widetilde{a}_{11} = \det\Big(\qquad \Big) \qquad \operatorname{cof}(A) = \Big[\qquad \Big]$$

$$\widetilde{a}_{12} = \det\Big(\qquad \Big) \qquad \operatorname{adj}(A) = \Big[\qquad \Big]$$

$$\widetilde{a}_{21} = \det\Big(\qquad \Big) \qquad A \operatorname{adj}(A) = \Big[\qquad \Big]\Big[\qquad \Big]$$

$$\widetilde{a}_{22} = \det\Big(\qquad \Big) \qquad = \Big[\qquad \Big]$$

Bedeutung der Adjunkten

Lemma 27.15

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$\operatorname{adj}(A)\, A = A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I$$

Beispiel 27.16

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Satz 27.17

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, [A]_{ij}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, [A]_{ij}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Beispiel 27.18

Wir entwickeln die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

nach der zweiten Spalte:

Cramersche Regel

Satz 27.19

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist A invertierbar und $b \in K^n$, dann gilt für die Lösung von $A\,x = b$:

$$x_i = \frac{\det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \ldots, a_{\bullet n})}{\det(A)} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Beweis.

$$\det(A)\,A\,x = \det(A) \sum_{i=1}^{n} a_{\bullet i}\, x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{\bullet i} \det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \ldots, a_{\bullet n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{\bullet i} \sum_{j=1}^{n} b_j \det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet i-1}, e_j, a_{\bullet i+1}, \ldots, a_{\bullet n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{\bullet i} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \widetilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_{\bullet i}\, \widetilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_j\, e_j \det(A) = \det(A)\, b$$

Beispiel 27.20

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ über $\mathbb{Q}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \quad \det\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$x_2 = \quad \det\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$x_2 = \quad \det\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

§ 27.3 Die Determinante eines Endomorphismus

Definition 27.21

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit der Basis B_V.

Die **Determinante** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{Endo}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(A)$$

mit der Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$.

$$\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V \leftarrow \widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V \leftarrow B_V} \, \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \, \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$$

Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen

Lemma 27.22 — vgl. Lemma 27.8

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \operatorname{Endo}(f)$.

1. $\det(f)$ ist eine alternierende Multilinearform auf $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.
2. $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
4. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.
5. $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist linear unabhängig
6. $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
7. $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \operatorname{Endo}(V^*)$.

§ 27.4 Orientierung eines Vektorraumes

Wiederholung: geordneter Körper

Definition 10.19

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0 und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

Der Körper heißt **geordnet** bzgl. der Totalordnung $\leqslant$, wenn

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

$$\alpha \geqslant 0 \text{ und } \beta \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt.

orientierungstreuer Automorphismus

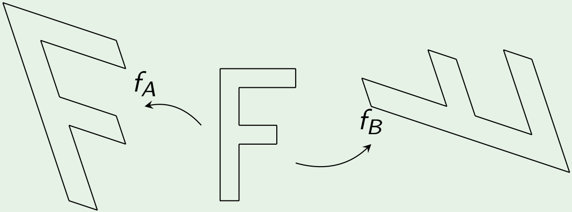
Definition 27.23

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K. Ein Automorphismus $f \in \operatorname{Auto}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$
- **orientierungsumkehrend** im Fall $\det(f) < 0$

Beispiel 27.24

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^{2\times 2}$$



gleich orientierte Basen

Definition 27.25

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K.

1. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
2. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation

Lemma 27.26

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K.

Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V.

Jede der beiden Äquivalenzklassen von Basen eines Vektorraumes V mit $\dim(V) \geqslant 1$ über einem geordneten Körper K wird als eine **Orientierung** des Vektorraumes V bezeichnet.

Oft wird eine der beiden die **positive Orientierung** und die andere die **negative Orientierung** des Vektorraumes genannt. Die Festlegung, welche welche ist, ist allerdings willkürlich, also nicht kanonisch.