

Lineare Algebra II

Woche 05

11.05.2026 und 12.05.2026

§ 27 Determinanten

Wir betrachten einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Die Determinante ist eine Maßzahl für **Endomorphismen** $f \in \text{Endo}(V)$.

- Wir definieren Determinantenformen auf $V^n = V \times \dots \times V$.
- Wir definieren **die** Determinante für Matrizen in $K^{n \times n}$.
- Wir übertragen den Begriff der Determinante mit Hilfe von Darstellungsmatrizen auf Endomorphismen $f \in \text{Endo}(V)$.

Determinantenformen

Definition 27.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = \overset{\circ}{n} \in \mathbb{N}_0$.

Eine alternierende Multilinearform $\Delta \in \text{Mult}(V^{\overset{\circ}{n}}, K)$ $r = n$

$$\Delta: V^n \ni (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V .

Die Nullform ist die triviale Determinantenform.

Determinantenformen

Bemerkung 27.2

Lemma 26.4

① (v_1, \dots, v_n) linear abhängig $\Rightarrow \Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$

② $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$
 $= \alpha \Delta(v_1, \dots, v_n)$ wegen der Linearität im i -ten Arg.

③ $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$
 $\stackrel{i \neq j}{=} \Delta(v_1, \dots, v_n) + \alpha \Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$
 $= \Delta(v_1, \dots, v_n) + 0$ \uparrow kommt doppelt

④ $\Delta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$
 $\stackrel{i \neq j}{=} -\Delta(v_1, \dots, v_n)$

Determinantenformen

$$\text{Mult}(V^n; K) \cong V^{*\otimes n}$$

$$\text{Unterraum der alternierenden Multilinearformen} \cong V_{\text{alt}}^{*\otimes n}$$

- $\dim(V_{\text{alt}}^{*\otimes n}) = \binom{n}{n} = 1$

Eine allgemeine Multilinearform erfordert n^n Einträge der Komponenten

- Eine Determinantenform Δ wird bereits durch einen einzigen Funktionswert $\Delta(b_1, \dots, b_n)$ eindeutig festgelegt.

Normierungswert Basis von V

- Für zwei verschiedene Determinantenformen gilt, dass eine ein skalares Vielfaches der anderen ist.

Gestalt von Determinantenformen

Satz 27.3

$n \in \mathbb{N}_0$

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis (b_1, \dots, b_n) und (b_1^*, \dots, b_n^*) die zugehörige duale Basis.

- ① Die Determinantenformen Δ auf V sind genau die Tensoren in $V^{*\otimes n}$ der Gestalt

$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) b_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes b_{\sigma(n)}^*$$

$\alpha \in K$ \uparrow $\sigma \in S_n$ \leftarrow Permutationen aus der symm. Gruppe $= \pm 1 \in K$

Die Zuordnung $V_{\text{alt}}^{*\otimes n} \ni \Delta \mapsto \alpha \in K$ ist ein Isomorphismus.

vgl. Beispiel 26.7: Komp.hypermatrix bzgl. (b_1^*, \dots, b_n^*) $n = 3$

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha \\ \cdot & -\alpha & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \alpha & \cdot \\ -\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Gestalt von Determinantenformen

$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \underbrace{b_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes b_{\sigma(n)}^*}_{\langle b_{\sigma(1)}^*, \cdot \rangle \cdots \langle b_{\sigma(n)}^*, \cdot \rangle}$$

Beweis. Jeder solche Tensor repräsentiert eine n -Linearform.

• Δ ist alternierend: Jeder Summand erzeugt in der Komp. matrix $\Phi_{\mathbb{R}^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^*}^{-1}(\Delta)$ einen einzigen Eintrag $\alpha (\operatorname{sgn} \sigma)$ an der Stelle $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

\Rightarrow Die Hypermatrix ist alternierend.

\Rightarrow (Lemma 26.6) Δ ist alternierend

• Jede Wahl von $\alpha \in K$ erzeugt eine andere Determinantenform. $K \ni \alpha \mapsto \Delta \in V_{\text{alt}}^{* \otimes n}$ ist also injektiv und linear, also auch surjektiv.

Auswertung von Determinantenformen

Satz 27.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis (b_1, \dots, b_n) und (b_1^*, \dots, b_n^*) die zugehörige duale Basis.

- ② Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig mit $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$, dann gilt
sollen eingesetzt werden

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \underbrace{\Delta(b_1, \dots, b_n)}_{\text{Normierungswert}}$$

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \leftarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Koeffizienten

Auswertung von Determinantenformen

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i \Rightarrow \Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

Beweis. $\Delta(v_1, \dots, v_n)$

$$= \Delta \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} b_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} b_{i_n} \right)$$

$$= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\Delta(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})}_{=0 \text{ bei überhol. Indizes}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Delta(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)})$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

alt. \uparrow
 \Rightarrow Schiefesystem.

§ 27.1 Die Determinante einer Matrix

die Determinante einer Matrix

Haben die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ die Darstellung $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$ bzgl. der Basis (b_1, \dots, b_n) , dann gilt

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \underbrace{\Delta(b_1, \dots, b_n)}_{\text{Normierungswert}}$$

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Definition 27.5

Die **Determinante** von $A \in K^{n \times n}$ ist definiert als

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Diese Darstellung heißt die **Leibniz-Formel**.

die Determinante einer Matrix

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Beispiel 27.7

- ① Im Fall $n = 0$ gilt für $A = []$
 $\# S_0 = 0! = 1$

$$\det(A) = 1$$

- ② Im Fall $n = 1$ gilt für $A = [a]$
 $\# S_1 = 1! = 1$

$$\det(A) = a$$

- ③ Im Fall $n = 2$ gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underline{a_{11} \cdot a_{22}} - \underline{a_{21} \cdot a_{12}}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

die Determinante einer Matrix

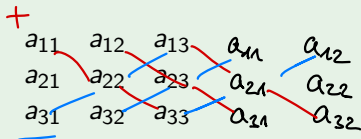
$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Beispiel 27.7

③ Im Fall $n = 3$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}$$

Regel von Sarrus



Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ① $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ von A .
- ② $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.

Beweis. ① $\det = 1 \cdot \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \pi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \pi_{\sigma(n)}$

② $\det(\alpha a_{\bullet 1}, \dots, \alpha a_{\bullet n}) = \alpha^n \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ③ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
④ $\det(I) = 1$.
- } $\det: (K^{n \times n}, \cdot) \rightarrow (K, \cdot)$
ist Monoid-Homomorphismus

Beweis. ③ $\det(AB) = \det\left(\sum_{i_1} b_{i_1,1}(Ae_{i_1}), \dots, \sum_{i_n} b_{i_n,n}(Ae_{i_n})\right)$

$$= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} b_{i_1,1} \dots b_{i_n,n} \det(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n} \det(Ae_{\sigma(1)}, \dots, Ae_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n} \underbrace{\det(Ae_{\sigma(1)}, \dots, Ae_{\sigma(n)})}_{=\det(A)}$$

$= \det(B)$

④ siehe ①

§ 27.2 Berechnung der Determinante

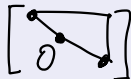
Determinante einer (Block-)Dreiecksmatrix

Lemma 27.9

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ① Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$



- ② Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Beweis. Übung

Determinante von Elementarmatrizen

Ziel: $\det(A)$ bestimmen durch Transformation von A auf Zeilenstufenform (obere Dreiecksmatrix) durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links.

Lemma 27.10

Typ I

$$\text{Für } D_i(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(D_i(\alpha)) = \alpha$$

Determinante von Elementarmatrizen

Lemma 27.10

Typ II

Für $S_{i,j}(\alpha) :=$ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ gilt $\det(S_{i,j}(\alpha)) = 1$

(Note: In the original image, a red arrow points from the index i to the α entry, and a red α is written in the (i,j) position of the matrix.)

„Addiere das α -Fache von Zeile j zu Zeile i “

$$\det(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j + \alpha e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ = \det(e_1, \dots, e_n)$$

Berechnung der Determinante durch Zeilenoperationen

ZSF durch Typ-II- und Typ-III-Operationen

Beispiel 27.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdot 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

Berechnung der Determinante durch Zeilenoperationen

Beispiel 27.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ -}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0.$$

Streichungsmatrix

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- Die **Streichungsmatrix** von A bzgl. (i, j) ist

$$(A)_{\neq i, \neq j} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{---} & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & \text{---} & a_{1,n} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{---} & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \text{---} & a_{i-1,n} \\ \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\ a_{i+1,1} & \text{---} & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \text{---} & a_{i+1,n} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{n,1} & \text{---} & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \text{---} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$\in K^{(n-1) \times (n-1)}$

i

j

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ② Der **Minor** oder die **Unterdeterminante** von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

$$[A]_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix und Adjunkte

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ③ Die Größe

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} [A]_{ij}$$

Unterdeterminante

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

heißt der **Kofaktor** der Matrix A bzgl. des Index (i, j) .

Die Matrix $\text{cof}(A) := (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ heißt die **Kofaktormatrix** von A .

- ④ Die **Adjunkte** von A oder die zu A **komplementäre Matrix** ist die Transponierte der Kofaktormatrix:

$$\text{adj}(A) := \text{cof}(A)^T$$

- ⑤ Im Fall $n = 0$ ist $A = [] = \text{cof}(A) = \text{adj}(A)$.

Lemma 27.13

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\tilde{a}_{ij} = \det \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{array}$$

Ersetze die j -te Spalte durch e_j .

Kofaktormatrix und Adjunkte

Beispiel 27.14

Was sind die Kofaktoren der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$?

$$\tilde{a}_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -2$$

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) I$$

Bedeutung der Adjunkten

Lemma 27.15

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$\text{adj}(A) A = A \text{adj}(A) = \det(A) I$$

Beispiel 27.16

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Satz 27.17

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

Entwicklung nach der i -ten Zeile:

*günstig bei Nullen
in dieser Zeile*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}$$

Unterdeterminante

Entwicklung nach der j -ten Spalte:

in dieser Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Beispiel 27.18

Wir entwickeln die Determinante von $j=2$

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{array}{|c} \hline - \\ \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot 3 + 10 = 4 \end{aligned}$$

Cramersche Regel

Satz 27.19

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$x = A^{-1}b$$

Ist A invertierbar und $b \in K^n$, dann gilt für die Lösung von $Ax = b$:

$$x_i = \frac{\det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n})}{\det(A)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Beweis.

$$\det(A) Ax = \det(A) \sum_{i=1}^n a_{\bullet i} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{\bullet i} \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n})$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{\bullet i} \sum_{j=1}^n b_j \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, e_j, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n})$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{\bullet i} \sum_{j=1}^n b_j \tilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n a_{\bullet i} \tilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^n b_j e_j \det(A) = \det(A) b$$

$$= [A \operatorname{adj}(A)]_{\cdot j}$$

Cramersche Regel

Beispiel 27.20

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über \mathbb{Q} mit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 4 \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{17}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{12}{4} \end{aligned} \right\} x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -12 \end{pmatrix}$$

§ 27.3 Die Determinante eines Endomorphismus

die Determinante eines Endomorphismus

Definition 27.21

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit der Basis B_V .

Die **Determinante** eines Endomorphismus $f \in \text{Endo}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(A)$$

mit der Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$.

$$\hat{A} = \mathcal{M}_{\hat{B}_V \leftarrow \hat{B}_V}(f) = \underbrace{T}_{T^{-1}} \underbrace{\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)}_A \underbrace{T}_{T} \quad \begin{array}{l} \text{Ähnlid-} \\ \text{keits-} \\ \text{trafo} \end{array}$$

$$\det(\hat{A}) = \det(T^{-1}) \det(A) \det(T) = \det(A).$$

$\underbrace{\det(T^{-1}) \det(T)}_{= \frac{1}{\det(T)} \det(T)}$

Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen

Lemma 27.22 (v_1, \dots, v_n) Basis von V vgl. Lemma 27.8

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien $f, g \in \text{Endo}(V)$.

- 1 $\det(f)$ ist eine alternierende Multilinearform auf $(f(v_1), \dots, f(v_n))$.
- 2 $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
- 3 $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- 4 $\det(\text{id}_V) = 1$.
- 5 $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(f) = n \Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ ist linear unabhängig
f ist Automorphismus
- 6 $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
- 7 $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \text{Endo}(V^*)$.

§ 27.4 Orientierung eines Vektorraumes

Wiederholung: geordneter Körper

Definition 10.19

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0 und \leq eine Totalordnung auf K .

Der Körper heißt **geordnet** bzgl. der Totalordnung \leq , wenn

$$\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \text{körper.mit } +$$

$$\alpha \geq 0 \text{ und } \beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geq 0 \quad \text{mit } \cdot$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt.

orientierungstreuer Automorphismus

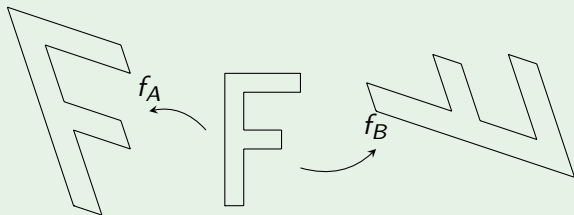
Definition 27.23

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem **geordneten** Körper K . Ein Automorphismus $f \in \text{Auto}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$
- **orientierungsumkehrend** im Fall $\det(f) < 0$

Beispiel 27.24 $\det(A) = 2$ $\det(B) = -2$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$



Definition 27.25

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K .

- 1 Zwei Basen B_V und \widehat{B}_V heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
- 2 Zwei Basen B_V und \widehat{B}_V heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation

Lemma 27.26

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K .

Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V .

Jede der beiden Äquivalenzklassen von Basen eines Vektorraumes V mit $\dim(V) \geq 1$ über einem geordneten Körper K wird als eine **Orientierung** des Vektorraumes V bezeichnet.

Oft wird eine der beiden die **positive Orientierung** und die andere die **negative Orientierung** des Vektorraumes genannt. Die Festlegung, welche welche ist, ist allerdings willkürlich, also nicht kanonisch.