

Lineare Algebra II

Woche 04

05.05.2026 und 07.05.2026

§ 24 Multilineare Abbildungen und das mehrfache Tensorprodukt von Vektorräumen

Definition 24.1

vgl. Definition 23.1

Es seien V_1, \dots, V_N sowie W Vektorräume über demselben Körper K .

- 1 Eine Abbildung

$$m: \prod_{k=1}^N V_k = V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$$

heißt **multilinear**, wenn für jedes $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ und alle fest gewählten $v_j \in V_j$ mit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\}$ die Abbildung

$$V_i \ni v_i \mapsto m(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_N) \in W$$

linear ist.

- 2 Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$.

Definition 24.1

vgl. Definition 23.1

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper K .

- ③ Eine multilineare Abbildung in den Vektorraum K nennen wir eine **Multilinearform** auf $V_1 \times \dots \times V_N$.
- ④ Die Menge aller Multilinearformen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; K)$ oder kurz mit $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N)$.

Bemerkung 24.2

- 1 Im Fall $N = 0$ besteht das kartesische Produkt $V_1 \times \cdots \times V_N$ nur aus dem leeren Tupel $(\)$. Jede Abbildung $\{(\)\} \rightarrow W$ ist dann multilinear.
- 2 Im Fall $N = 1$ sind die multilinearen Abbildungen $V_1 \rightarrow W$ gerade die linearen Abbildungen:

$$\text{Mult}(V_1; W) = \text{Homo}(V_1, W)$$

- 3 Im Fall $N = 2$ sind die multilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \rightarrow W$ gerade die bilinearen Abbildungen aus § 23:

$$\text{Mult}(V_1, V_2; W) = \text{Bil}(V_1, V_2; W)$$

Beispiele 3-linearer Abbildungen

vgl. Beispiel 23.2

- ① Für jeden Körper K ist die Abbildung

$$K \times K \times K \ni (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha \beta \gamma \in K$$

eine 3-Linearform auf $K \times K \times K$.

- ② Für jeden Körper K und $n, m, \ell, p \in \mathbb{N}_0$ ist das Matrix-Produkt

$$K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \times K^{\ell \times p} \ni (A, B, C) \mapsto A B C \in K^{n \times p}$$

ist eine 3-lineare Abbildung in $\text{Mult}(K^{n \times m}, K^{m \times \ell}, K^{\ell \times p}; K^{n \times p})$.

- ③ Für jede Menge X und jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist die punktweise Multiplikation von drei Funktionen $X \rightarrow K$, also

$$K^X \times K^X \times K^X \ni (f, g, h) \mapsto f \cdot g \cdot h \in K^X,$$

eine 3-lineare Abbildung in $\text{Mult}(K^X, K^X, K^X; K^X)$.

multilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Satz 24.3

vgl. Satz 23.3

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N sowie W Vektorräume über demselben Körper.

Dann ist $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{V_1 \times \dots \times V_N} = \{f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W\}$$

aller Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$.

Existenz und Eindeutigkeit multilinearer Abbildungen

Satz 24.4

vgl. Satz 23.4

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N sowie W Vektorräume über demselben Körper. Weiter seien

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$
- $(w_{i_1, \dots, i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ eine Familie von Vektoren in W

Dann gibt es genau eine N -lineare Abbildung

$$m: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft

$$m(v_{1,i_1}, \dots, v_{N,i_N}) = w_{i_1, \dots, i_N} \quad \text{für alle } (i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N$$

Tensorprodukt, universelle multilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=1}^N V_k & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{k=1}^N V_k \\ & \searrow m & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Definition 24.5

vgl. Definition 23.6

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K . Weiter seien $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ ein K -Vektorraum und $\otimes: \prod_{k=1}^N V_k \rightarrow \bigotimes_{k=1}^N V_k$ N -linear.

- ① Das Paar $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von V_1, \dots, V_N , wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für **jede** N -lineare Abbildung $m: \prod_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ in **irgendeinen** K -Vektorraum W gibt es eine **eindeutig bestimmte** lineare Abbildung $f \in \text{Homo}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, W)$ mit $m = f \circ \otimes$, also

$$m(v_1, \dots, v_N) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) \quad \text{für alle } v_k \in V_k$$

Tensorprodukt, universelle multilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=1}^N V_k & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{k=1}^N V_k \\ & \searrow m & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Definition 24.5

vgl. Definition 23.6

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

- 2 Dabei heißt $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ der **Tensorproduktraum**. Die Elemente von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißen **Tensoren**. Der Nullvektor in $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißt der **Nulltensor**.
- 3 $\otimes: \prod_{k=1}^N V_k \rightarrow \bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißt die **universelle multilineare Abbildung** des Tensorprodukts $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$.

Tensoren der Form $v_1 \otimes \dots \otimes v_N$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**. $v_1 \otimes \dots \otimes v_N$ heißt auch das **Tensorprodukt** der Vektoren v_1, \dots, v_N .

universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$

Satz 24.6 vgl. Satz 23.8

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=1}^N V_k & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{k=1}^N V_k \\ & \searrow m & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

- 1 Zu jeder N -linearen Abbildung $m: \prod_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ existiert genau eine lineare Abbildung $f: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $m = f \circ \otimes$, also $m(v_1, \dots, v_N) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)$ für alle $v_k \in V_k$.
- 2 Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung $f: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ durch $f \circ \otimes: \prod_{k=1}^N V_k \ni (v_1, \dots, v_N) \mapsto f(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) \in W$ eine N -lineare Abbildung definiert.

3

$$\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W) \ni m \mapsto f \in \text{Homo}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, W)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

Angabe linearer Abbildungen auf Tensorprodukträumen

Wie definieren wir eine lineare Abbildung $f: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow W$?

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=1}^N V_k & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{k=1}^N V_k \\ & \searrow m & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Lineare Abbildungen $f: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ werden eindeutig durch ihre Bilder auf den Elementartensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ festgelegt, sofern die zugehörige Abbildungsvorschrift N -linear ist.

„Es sei $f: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow W$ diejenige lineare Abbildung, deren Bilder auf Elementartensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ durch die (N -lineare) Abbildungsvorschrift ... festgelegt sind.“

Beispiel

vgl. Beispiel 23.10

- ① Es sei $m: K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \times K^{\ell \times p} \rightarrow K^{n \times p}$ mit $m(A, B, C) = A B C$.

Die zugehörige lineare Abbildung

$$f: K^{n \times m} \otimes K^{m \times \ell} \otimes K^{\ell \times p} \rightarrow K^{n \times p}$$

ist durch die Bilder $f(A \otimes B \otimes C) = A B C$ auf den Elementartensoren $A \otimes B \otimes C$ für $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times \ell}$ und $C \in K^{\ell \times p}$ eindeutig festgelegt.

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Satz 24.8

vgl. Satz 23.11

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K .

- 1 Sind $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ und $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte von V_1, \dots, V_N , dann gibt es $I \in \text{Iso}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\otimes} = I \circ \otimes$, d. h., folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \bigotimes_{k=1}^N V_k & \\ \otimes \swarrow & & \searrow \widetilde{\otimes} \\ \bigotimes_{k=1}^N V_k & \xrightarrow{I} & \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k \end{array}$$

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Satz 24.8

vgl. Satz 23.11

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K .

- ② Ist $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N und ist $I \in \text{Iso}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$ ein Isomorphismus mit einem weiteren K -Vektorraum $\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k$, dann ist auch $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N mit $\widetilde{\otimes} := I \circ \otimes: \bigotimes_{k=1}^N V_k \rightarrow \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k$.

Beispiel 24.9

- 1 Ein 0-faches Tensorprodukt ($N = 0$) von K -Vektorräumen ist isomorph zum Körper K , d. h., es gilt $\bigotimes_{k=1}^0 V_k \cong K$, und $\otimes: \{()\} \rightarrow K$ mit $\otimes(()) = 1$ ist eine zugehörige universelle 0-lineare Abbildung.

Beispiel 24.9

- ② Ein 1-faches Tensorprodukt ($N = 1$) eines K -Vektorraumes V ist isomorph zum Vektorraum V selbst, und $\otimes: V \rightarrow V$ mit $\otimes(v) = v$ für alle $v \in V$ ist eine zugehörige universelle 1-lineare Abbildung.

- ③ Die 2-fachen Tensorprodukte $V_1 \otimes V_2$ von K -Vektorräumen V_1 und V_2 waren der Gegenstand von § 23.

Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem

Lemma 24.10

vgl. Lemma 23.12

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N . Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Jeder Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ lässt sich also schreiben als Linearkombination von Elementartensoren:

$$t = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{N,i}.$$

Die Koeffizienten α_i können o. B. d. A. alle als 1 gewählt werden.

Lemma 24.11

vgl. Lemma 23.13

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N . Weiter seien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_1, \dots, V_k für $k = 1, \dots, N$. Dann gilt:

- 1 $B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ ist eine Basis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Sie wird die von B_{V_1}, \dots, B_{V_N} **induzierte Basis** oder die **Tensorproduktbasis** zu B_{V_1}, \dots, B_{V_N} von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ genannt.

- 2 $\dim(\bigotimes_{k=1}^N V_k) = \prod_{k=1}^N \dim(V_k)$.

Definition 24.12

vgl. Definition 23.16

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Der **Rang** eines Tensors $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$, geschrieben $\text{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^n v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{N,i}$$

Bemerkung 24.13

- 1 Im Fall $N = 0$ haben alle Tensoren in $\bigotimes_{k=1}^0 V_k \cong K$ bis auf den Nulltensor ($0 \in K$) den Rang 1.
- 2 Im Fall $N = 1$ haben ebenfalls alle Tensoren in $\bigotimes_{k=1}^1 V_k \cong V_1$ bis auf den Nulltensor (der Nullvektor in V_1) den Rang 1.
- 3 Im Fall $N = 2$ gibt es Tensoren $t \in \bigotimes_{k=1}^2 V_k \cong V_1 \otimes V_2$ mit $\text{Rang}(t) = r$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leq \min\{\dim(V_1), \dim(V_2)\}$.

Sind beide Dimensionen endlich, dann kann der Rang über den Rang einer Komponentenmatrix von t bestimmt werden.

Rang eines Tensors im Fall $N \geq 3$

Bemerkung 24.13

- 4 Im Fall $N \geq 3$ ist die Bestimmung des Ranges eines N -stufigen Tensors über vielen Körpern K ein **NP-schweres Problem** und über endlichen Körpern K ein **NP-vollständiges Problem** im Sinne der Komplexitätstheorie.
- 5 Selbst der maximal auftretende Rank eines N -stufigen Tensors in $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ ist im Fall $N \geq 3$ i. A. nicht bekannt, nicht einmal dann, wenn alle V_k dieselbe endliche Dimension besitzen. Bekannt sind im Fall $N = 3$ zur Zeit

$$\dim(V) = 2 \quad \Rightarrow \quad \max\{\text{Rang}(t) \mid t \in V \otimes V \otimes V\} = 3$$

$$\dim(V) = 3 \quad \Rightarrow \quad \max\{\text{Rang}(t) \mid t \in V \otimes V \otimes V\} = 5$$

Die Bestimmung weiterer scharfer Schranken für den maximalen Rang eines N -stufigen Tensors ist ein aktives Forschungsgebiet.

Lemma 24.14

vgl. Lemma 23.18

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N . Dann gilt:

- 1 Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
- 2 Für $v_k \in V_k$ mit $k = 1, \dots, N$ gilt

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{mindestens ein } v_k \text{ ist der Nullvektor}$$

- 3 Jeder Elementartensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$, wobei alle $v_k \in V_k$ für $k = 1, \dots, N$ ungleich dem Nullvektor sind, hat Rang 1.

Tensorprodukt linearer Abbildungen

Definition 24.15

vgl. Definition 23.30

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und U_1, \dots, U_N sowie V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N U_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U_1, \dots, U_N sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Dann heißt die für $u_k \in U_k$, $k = 1, \dots, N$ durch

$$f_1 \boxtimes \dots \boxtimes f_N: \begin{cases} U_1 \otimes \dots \otimes U_N \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_N \\ u_1 \otimes \dots \otimes u_N \mapsto f_1(u_1) \otimes \dots \otimes f_N(u_N) \end{cases}$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung das **Tensorprodukt** der Abbildungen f_1, \dots, f_N .

Definition 24.16

vgl. Definition 15.1

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

- 1 Eine N -fach indizierte Familie in K mit der Indexmenge $\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_N \rrbracket$ heißt eine **Hypermatrix** der **Stufe** oder **Ordnung** N oder auch eine **N -achsige Hypermatrix** der **Dimension** $n_1 \times \dots \times n_N$ über dem Körper K .

Wir schreiben eine Hypermatrix in der Form

$$A = (a_{i_1, \dots, i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_N \rrbracket}$$

- 2 Die Menge aller Hypermatrizen der Dimension $n_1 \times \dots \times n_N$ wird mit $K^{n_1 \times \dots \times n_N}$ bezeichnet.

Definition 24.16

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

- ③ Sind $x_1 \in K^{n_1}, \dots, x_N \in K^{n_N}$ Spaltenvektoren, so heißt diejenige N -achsige Hypermatrix A der Dimension $n_1 \times \dots \times n_N$ mit

$$a_{i_1, \dots, i_N} = \underbrace{x_{1, i_1}}_{i_1\text{-Koordinate von } x_1} \cdots \underbrace{x_{N, i_N}}_{i_N\text{-Koordinate von } x_N}$$

gegeben sind, das **äußere Produkt** der Vektoren x_1, \dots, x_N .

Definition 24.16

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

- Der **Rang** einer Hypermatrix $A \in K^{n_1 \times \dots \times n_N}$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form

$$A = \sum_{i=1}^n x_1^{(i)} \boxtimes \dots \boxtimes x_N^{(i)}$$

mit $x_k^{(i)} \in K^{n_k}$ für $k = 1, \dots, N$ und $i = 1, \dots, n$ möglich ist.

Bemerkung 24.17

- 1 Die Hypermatrizen der Dimension $n_1 \times \cdots \times n_N$ über dem Körper K bilden einen Vektorraum über K bezüglich der komponentenweisen Addition und S-Multiplikation.
- 2 Die Dimension dieses Vektorraumes $K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ ist $\prod_{k=1}^N n_k$.
- 3 Die Matrizen

$$E_{i_1, \dots, i_N} = e_{i_1} \boxtimes \cdots \boxtimes e_{i_N}$$

mit $i_k \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$ für $k = 1, \dots, N$ bilden die **Standardbasis** von $K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$.

Bemerkung 24.17

- ④ Eine 0-achsige Hypermatrix ist eine Abbildung $\{()\} \rightarrow K$, kann als ein Skalar aus K aufgefasst werden.
- ⑤ Eine 1-achsige Hypermatrix kann als Vektor in K^{n_1} aufgefasst werden.
- ⑥ Eine 2-achsige Hypermatrix kann als Matrix in $K^{n_1 \times n_2}$ aufgefasst werden. Der Rang-Begriff aus Definition 24.16 stimmt mit dem bekannten Rang-Begriff für Matrizen überein.
- ⑦ Allgemein kann eine N -achsige Hypermatrix als ein N -dimensionales Array von Elementen des Körpers K verstanden werden.

Satz 24.18

vgl. Satz 23.34

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \dots, N$. Weiter seien die Familien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ für $k = 1, \dots, N$ Basen von V_1, \dots, V_N und $B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$. Dann gilt:

- 1 Die Abbildung $\Phi_{B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}} : K^{n_1 \times \dots \times n_N} \rightarrow \bigotimes_{k=1}^N V_k$, definiert durch

$$A \mapsto t := \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} a_{i_1, \dots, i_N} (v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{N,i_N}),$$

ist ein linearer Isomorphismus $K^{n_1 \times \dots \times n_N} \rightarrow \bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Satz 24.18

vgl. Satz 23.34

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \dots, N$. Weiter seien die Familien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ für $k = 1, \dots, N$ Basen von V_1, \dots, V_N und $B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$. Dann gilt:

- ② Der zu $\Phi_{B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}}$ inverse Isomorphismus ist die Abbildung

$$\Phi_{B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}}^{-1} : \bigotimes_{k=1}^N V_k \ni t \mapsto A \in K^{n_1 \times \dots \times n_N},$$

die jedem Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ seine eindeutige **Komponentenhypermatrix** $A \in K^{n_1 \times \dots \times n_N}$ bzgl. der Basis $B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}$ zuordnet.

Beispiel 24.19

- 1 0-achsige Tensoren werden durch 0-achsige Hypermatrizen (Skalare) dargestellt.
- 2 1-achsige Tensoren werden durch 1-achsige Hypermatrizen (Spaltenvektoren) dargestellt.
- 3 2-achsige Tensoren werden durch 2-achsige Hypermatrizen (gewöhnliche Matrizen) dargestellt.
- 4 N -achsige Tensoren mit $N \geq 3$ werden durch N -achsige Hypermatrizen (N -dimensionale Arrays) dargestellt.

Lemma 24.20

vgl. Lemma 23.37

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume V_1^*, \dots, V_N^* . Dann gilt:

1 Die Abbildung

$$\bigotimes_{k=1}^N V_k^* \rightarrow (\bigotimes_{k=1}^N V_k)^*$$
$$v_1^* \otimes \cdots \otimes v_N^* \mapsto v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^* = \langle v_1^*, \cdot \rangle \cdots \langle v_N^*, \cdot \rangle$$

definiert einen kanonischen linearen Isomorphismus.

Dabei ist $v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^* \in (\bigotimes_{k=1}^N V_k)^*$ gegeben durch die Bilder auf den Elementartensoren, nämlich durch

$$(v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^*)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) := \langle v_1^*, v_1 \rangle \cdots \langle v_N^*, v_N \rangle$$

Lemma 24.20

vgl. Lemma 23.37

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume V_1^*, \dots, V_N^* . Dann gilt:

- ② Es seien $B_{V_k} = (v_{k,i_1}, \dots, v_{k,i_{n_k}})$ für $k = 1, \dots, N$ Basen von V_1, \dots, V_N und $B_{V_k^*} = (v_{k,1}^*, \dots, v_{k,n_k}^*)$ die zugehörigen dualen Basen von V_1^*, \dots, V_N^* . Dann ist

$$(v_{1,i_1}^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_{N,i_N}^*)_{(i_1, \dots, i_N) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \cdots \times \llbracket 1, n_N \rrbracket}$$

die zu $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N} = (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \cdots \times \llbracket 1, n_N \rrbracket}$ duale Basis von $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N)^*$.

$$t = \Phi_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad a_{i_1, \dots, i_N} = (v_{1,i_1}^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_{N,i_N}^*)(t)$$

Rang eines Tensors ist Rang seiner Komp.hypermatrix

Satz 24.21

vgl. Satz 23.38

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \dots, N$ sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N . Weiter seien die Familien B_{V_k} für $k = 1, \dots, N$ Basen von V_1, \dots, V_N und $B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}$ die induzierte Basis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Dann gilt für jeden Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ ein Tensor und $A \in K^{n_1 \times \dots \times n_N}$ seine Komponentenhypermatrix $A = \Phi_{B_{V_1 \otimes \dots \otimes V_N}}^{-1}(t)$:

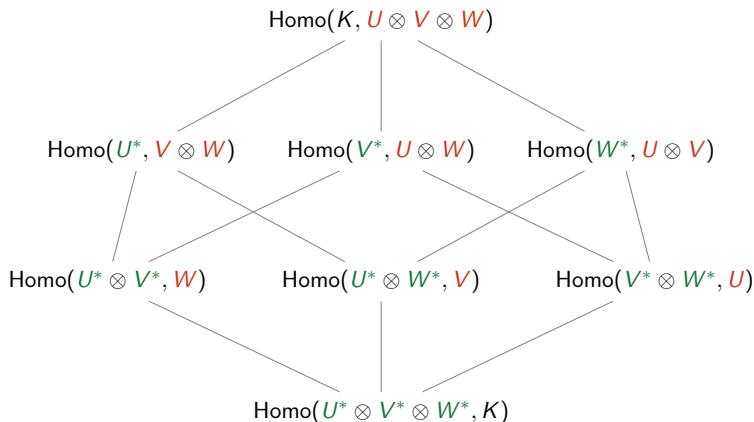
$$\text{Rang}(t) = \text{Rang}(A)$$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

- Ein Tensor in $U \otimes V \otimes W$ besitzt drei Eingänge, die Vektoren aus den jeweiligen Dualräumen U^* , V^* , W^* akzeptieren.
- Wird ein Eingang mit einem solchen Vektor belegt, so wird der Vektor vom Tensor „konsumiert“. Der entsprechende Faktor aus dem Tensorproduktraum $U \otimes V \otimes W$ wird dabei „verbraucht“ und verschwindet.
- Dieser Prozess kann auch mit mehreren Eingängen gleichzeitig geschehen.
- Das Ergebnis ist ein Tensor im Tensorproduktraum der nicht belegten Eingänge.

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Durch die Belegung bzw. Nicht-Belegung der drei Eingänge gibt es acht verschiedene Möglichkeiten, einen Tensor in $U \otimes V \otimes W$ als lineare Abbildung zu nutzen.

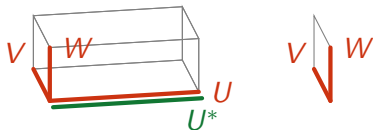


3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Nur der erste Eingang U wird belegt:

$$U \otimes V \otimes W \rightarrow \text{Homo}(U^*, V \otimes W)$$

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot, u \rangle (v \otimes w) = [u^* \mapsto \langle u^*, u \rangle v \otimes w]$$



Enthält ξ die Koordinaten eines Vektors $u^* \in U^*$ bzgl. der Basis B_{U^*} , dann besitzt das Bild $\langle u^*, u \rangle (v \otimes w)$ von u^* die 2-achsige Komponentenhypermatrix

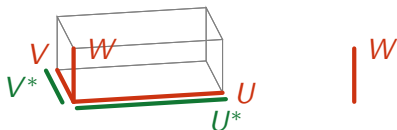
$$\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i a_{i\bullet\bullet}$$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Die ersten beiden Eingänge U und V werden belegt:

$$U \otimes V \otimes W \rightarrow \text{Homo}(U^* \otimes V^*, W)$$

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot, u \otimes v \rangle w = [u^* \otimes v^* \mapsto \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle w]$$



Enthalten ξ und η die Koordinaten von Vektoren $u^* \in U^*$ bzw. $v^* \in V^*$ bzgl. der Basis B_{U^*} bzw. B_{V^*} , dann besitzt das Bild $\langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle w$ des Elementartensors $u^* \otimes v^*$ die 1-achsige Komponentenhypermatrix

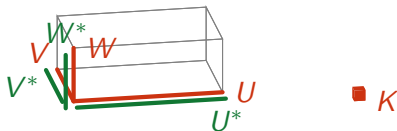
$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \xi_i \eta_j a_{ij}$$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Es werden alle drei Eingänge U , V und W belegt:

$$U \otimes V \otimes W \rightarrow \text{Homo}(U^* \otimes V^* \otimes W^*, K)$$

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot, u \otimes v \otimes w \rangle = [u^* \otimes v^* \otimes w^* \mapsto \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle \langle w^*, w \rangle]$$



Enthalten nun ξ , η und μ die Koordinaten von Vektoren $u^* \in U^*$, $v^* \in V^*$ bzw. $w^* \in W^*$ bzgl. der Basis B_{U^*} , B_{V^*} bzw. B_{W^*} , dann besitzt das Bild $\langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle \langle w^*, w \rangle$ des Elementartensors $u^* \otimes v^* \otimes w^*$ die 0-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \xi_i \eta_j \mu_k a_{ijk}$$

N -achsige Tensoren als lineare Abbildungen

- Die gezeigten Beispiele illustrieren das **Einsetzen von Vektoren in einen Tensor** oder auch als **Kontraktion eines Tensors mit einem oder mehreren Vektoren**, z. B.

$$t(u^*, v^*, \cdot) := \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle w$$

- Auf Ebene der Komponentenhypermatrix spricht man auch von der **Tensor-Vektor-Multiplikation** oder eigentlich **Hypermatrix-Vektor-Multiplikation**.

N -achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Satz 24.23

vgl. Satz 23.40

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Weiter sei $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$ und π eine Permutation der Menge $\llbracket 1, N \rrbracket$ mit der Eigenschaft $\pi(1) < \dots < \pi(s)$ und $\pi(s+1) < \dots < \pi(N)$. Dann gilt:

1 Es besteht der folgende kanonische Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \bigotimes_{k=1}^N V_k &\rightarrow \text{Homo} \left(\bigotimes_{k=1}^s V_{\pi(k)}^*, \bigotimes_{k=s+1}^N V_{\pi(k)} \right) \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_N &\mapsto \langle \cdot, v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(s)} \rangle (v_{\pi(s+1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(N)}) \end{aligned}$$

N -achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Satz 24.23

vgl. Satz 23.40

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und V_1, \dots, V_N endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Weiter sei $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$ und π eine Permutation der Menge $\llbracket 1, N \rrbracket$ mit der Eigenschaft $\pi(1) < \dots < \pi(s)$ und $\pi(s+1) < \dots < \pi(N)$. Dann gilt:

- ② Es seien B_{V_k} Basen von V_1, \dots, V_N und $B_{V_k}^*$ die zugehörigen dualen Basen von V_1^*, \dots, V_N^* . Weiter seien $A = \Phi_{B_{V_1}^* \otimes \dots \otimes B_{V_N}^*}^{-1}(t)$ für $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ und $\xi_{\pi(k)}$ der Koordinatenvektor eines Vektors aus $V_{\pi(k)}^*$ bzgl. der Basis $B_{V_{\pi(k)}^*}$ für $k = 1, \dots, s$. Dann ist das Bild des Elementartensors $v_{\pi(1)}^* \otimes \dots \otimes v_{\pi(s)}^*$ unter der obigen linearen Abbildung gegeben durch die Komponentenhypermatrix

$$\left(\sum_{i_{\pi(1)}} \dots \sum_{i_{\pi(s)}} \xi_{\pi(1), i_{\pi(1)}} \dots \xi_{\pi(s), i_{\pi(s)}} a_{i_1, \dots, i_N} \right)_{(i_{\pi(s+1)}, \dots, i_{\pi(N)})}$$

Beispiel 24.24

$$\text{id}: K^{n \times m} \rightarrow K^{n \times m}$$

- ① Wir identifizieren $K^{n \times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\text{id} \in \text{Homo}(K^n \otimes K^m, K^n \otimes K^m) \cong (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes K^n \otimes K^m$$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$a_{ijkl} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_l, e_i \otimes e_j \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Beispiel 24.24

$$.^T: K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$$

- ② Wir betrachten die Transpositionsabbildung

$$.^T \in \text{Homo}(K^n \otimes K^m, K^m \otimes K^n) \cong (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes K^m \otimes K^n$$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$a_{ijkl} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell, e_j \otimes e_i \rangle = \delta_{i\ell} \delta_{jk}$$

Beispiel 24.24

$$\cdot: K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}$$

③ Wir betrachten die Matrix-Matrix-Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot &\in \text{Homo}(K^n \otimes K^m \otimes K^m \otimes K^\ell, K^n \otimes K^\ell) \\ &\cong (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes (K^m)^* \otimes (K^\ell)^* \otimes K^n \otimes K^\ell \end{aligned}$$

Das Bild der Matrix-Matrix-Multiplikationsabbildung der Basismatrizen E_{ab} und E_{cd} ist $\delta_{bc} E_{ad}$ bzw. $\delta_{bc} e_a \otimes e_d$. Die „Koordinatenermittler“ $\pi_e \boxtimes \pi_f$ liefern

$$a_{abcdef} = \langle \pi_e \boxtimes \pi_f, \delta_{bc} e_a \otimes e_d \rangle = \delta_{bc} \delta_{ae} \delta_{df}$$

Komplexität der Matrix-Matrix-Multiplikation

- Die direkte Anwendung der Matrix-Matrix-Multiplikationsformel für $C = A B$, also $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$, erfordert $n m \ell$ Multiplikationen.
- Die Komponentenhypertextmatrix des Tensors, der zur Matrix-Matrix-Multiplikation gehört, besitzt bzgl. der Standardbasis die Einträge $\delta_{bc} \delta_{ae} \delta_{df}$, also $n m \ell$ Nicht-Null-Einträge.
- $n m \ell$ ist damit eine obere Schranke für den Tensorrang.
- **Strassens Algorithmus V. Strassen.** „Gaussian elimination is not optimal“. *Numerische Mathematik* 13.4 (1969), S. 354–356. DOI: [10.1007/bf02165411](https://doi.org/10.1007/bf02165411) zeigt, dass im Fall von $n = m = \ell = 2$ bereits 7 statt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ und allgemein $n^{\log_2(7)} \approx n^{2.81}$ Multiplikationen ausreichen.

Komplexität der Matrix-Matrix-Multiplikation

- Weitere Fortschritte durch **AlphaTensor** A. Fawzi u. a. „Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning“. *Nature* 610.7930 (2022), S. 47–53. DOI: [10.1038/s41586-022-05172-4](https://doi.org/10.1038/s41586-022-05172-4) und **Flip graphs** J. Moosbauer, M. Poole. *Flip graphs with symmetry and new matrix multiplication schemes*. 2025. arXiv: 2502.04514

n	m	ℓ	vorherige obere Schranke	neue obere Schranke $K = \mathbb{Z}_2$	Schranke allgemein
2	2	2	7	7	7
3	3	3	23	23	23
4	4	4	49	47	49
5	5	5	98	93	93
3	4	5	48	47	47

§ 25 Tensoren über einem Vektorraum

Tensoren über einem Vektorraum

Definition 25.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Für $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ heißt

$$\mathcal{T}^{(r,s)}(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

der **Tensorproduktraum vom Typ (r, s) über dem Vektorraum V** . Die Elemente dieses Tensorproduktraumes heißen **Tensoren vom Typ (r, s) über dem Vektorraum V** .

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass V **endlich-dimensional** ist. Es gelte also $\dim(V) = \dim(V^*) = n \in \mathbb{N}_0$.

Tensoren über einem Vektorraum

- Die Vektoren einer Basis des „primalen“ Raumes V werden mit unteren Indizes nummeriert.

Wir bezeichnen diese typischerweise mit $B_V = (v_1, \dots, v_n)$.

Die Koordinaten von Vektoren $v \in V$ bzgl. dieser Basis werden mit **oberen** Indizes notiert, also $v = \sum_{i=1}^n x^i v_i$.

- Die Kovektoren der zu B_V dualen Basis von V^* werden mit oberen Indizes nummeriert.

Wir bezeichnen diese typischerweise mit $B_{V^*} = (v^1, \dots, v^n)$.

Die Koordinaten von Kovektoren in V^* bzgl. dieser Basis werden mit **unteren** Indizes notiert, also $v^* = \sum_{i=1}^n x_i v^i$.

Darstellung von Tensoren

Tensorproduktbasis

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s}$$

Darstellung von Tensoren $t \in \mathcal{T}^{(r,s)}(V)$

$$t = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_s=1}^n a_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s}$$

Tensoren über einem Vektorraum als lineare Abbildungen

$$\mathcal{T}^{(0,0)}(V) \cong \text{Homo}(K, K)$$

$$\mathcal{T}^{(0,1)}(V) \cong \text{Homo}(K, V^*) \cong \text{Homo}(V, K)$$

$$\mathcal{T}^{(1,0)}(V) \cong \text{Homo}(K, V) \cong \text{Homo}(V^*, K)$$

$$\mathcal{T}^{(0,2)}(V) \cong \text{Homo}(K, V^* \otimes V^*) \cong \text{Homo}(V, V^*) \cong \text{Homo}(V \otimes V, K)$$

$$\mathcal{T}^{(1,1)}(V) \cong \text{Homo}(K, V \otimes V^*) \cong \text{Homo}(V, V) \cong \text{Homo}(V^* \otimes V, K)$$

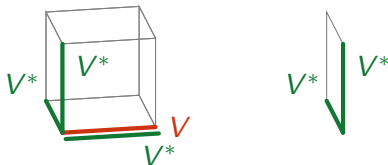
$$\mathcal{T}^{(2,0)}(V) \cong \text{Homo}(K, V \otimes V) \cong \text{Homo}(V^*, V) \cong \text{Homo}(V^* \otimes V^*, K)$$

Tensoren in $V \otimes V^* \otimes V^*$ als lineare Abbildungen

Nur der erste Eingang V wird belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \rightarrow \text{Homo}(V^*, V^* \otimes V^*)$$

$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle \cdot, v_1 \rangle (v^2 \otimes v^3)$$



Sind (x_1, \dots, x_n) die Koordinaten eines Vektors $v^1 \in V^*$ bzgl. der Basis B_{V^*} , dann besitzt das Bild $\langle v^1, v_1 \rangle (v^2 \otimes v^3)$ von v^1 die 2-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{i\bullet\bullet}$$

Tensoren in $V \otimes V^* \otimes V^*$ als lineare Abbildungen

Nur der zweite Eingang V^* wird belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \rightarrow \text{Homo}(V, V \otimes V^*)$$

$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle v^2, \cdot \rangle (v_1 \otimes v^3)$$



Sind (y^1, \dots, y^n) die Koordinaten eines Vektors $v_2 \in V$ bzgl. der Basis B_V , dann besitzt das Bild $\langle v^2, v_2 \rangle (v_1 \otimes v^3)$ von v_2 die 2-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{j=1}^n y^j a_{\bullet j \bullet}$$

Tensoren in $V \otimes V^* \otimes V^*$ als lineare Abbildungen

Die letzten beiden Eingänge V^* und V^* werden belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \rightarrow \text{Homo}(V \otimes V, V)$$

$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle v^2 \otimes v^3, \cdot \rangle v_1$$



Sind (y^1, \dots, y^n) und (z^1, \dots, z^n) die Koordinaten von Vektoren $v_2, v_3 \in V$ bzgl. der Basis B_V , dann besitzt das Bild $\langle v^2, v_2 \rangle \langle v^3, v_3 \rangle v_1$ des Elementartensors $v_2 \otimes v_3$ die 1-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n y^j z^k a_{\bullet jk}$$

Transformation von Komponentenmatrizen

$$B_V = (v_1, \dots, v_n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n) \quad \text{Basen von } V$$
$$B_{V^*} = (v^1, \dots, v^n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}^1, \dots, \widehat{v}^n) \quad \text{Basen von } V^*$$

Übergangsmatrizen $T := \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \in K^{n \times n}$ und $T := \mathcal{T}_{B_{V^*} \leftarrow \widehat{B}_{V^*}} \in K^{m \times m}$

$$\widehat{v}_j = \sum_{i=1}^n (T)_{ij} v_i \quad \text{bzw.} \quad v_i = \sum_{j=1}^n (T^{-1})_{ji} \widehat{v}_j$$

und

$$\widehat{v}^j = \sum_{i=1}^n (T^{-T})_{ij} v^i \quad \text{bzw.} \quad v^j = \sum_{i=1}^n (T^T)_{ij} \widehat{v}^i$$

Transformation von Komponentenmatrizen im Fall $\mathcal{T}^{(1,1)}(V)$

$$v_i = \sum_{k=1}^n (T^{-1})_{ki} \hat{v}_k \quad \text{und} \quad v^j = \sum_{\ell=1}^n (T^T)_{\ell j} \hat{v}^\ell$$

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^i (v_i \otimes v^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^i \left(\sum_{k=1}^n (T^{-1})_{ki} \hat{v}_k \right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^n (T^T)_{\ell j} \hat{v}^\ell \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (T^{-1})_{ki} (A)_j^i (T^T)_{\ell j} (\hat{v}_k \otimes \hat{v}^\ell) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (T^{-1})_{ik} (A)_\ell^k (T^T)_{j\ell} (\hat{v}_i \otimes \hat{v}^j) \end{aligned}$$

$$\hat{A}_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \underbrace{(T^{-1})_{ik}}_{\text{kontravariante Achse}} (A)_\ell^k \underbrace{(T^T)_{j\ell}}_{\text{kovariante Achse}}$$

§ 26 Symmetrische, schiefsymmetrische und alternierende Tensoren

Tensoren vom Typ $(r, 0)$

Wir betrachten Tensoren vom Typ $(r, 0)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ über einem **endlich-dimensionalen** Vektorraum V . Dennoch werden auch weiterhin duale Größen auftauchen, sodass wir auch hier **primale** Vektoren v_j und **duale** Vektoren v^j farblich unterscheiden wollen.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir

$$V^{\otimes r} := \mathcal{T}^{(r,0)}(V) = \bigotimes_{k=1}^r V$$

Es gilt $V^{\otimes r} \cong \text{Mult}(V^*, \dots, V^*; K)$.

Wir interessieren uns insbesondere für Tensoren mit gewissen Symmetrieeigenschaften. Diese werden mithilfe von **Permutationen** $\sigma \in S_r$ beschrieben.

Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$

Definition 26.1

Es seien V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_r$ eine Permutation auf $\llbracket 1, r \rrbracket$.

Dann heißt die durch

$$P_\sigma: \begin{cases} V^{\otimes r} \rightarrow V^{\otimes r} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \end{cases}$$

eindeutig definierte lineare Abbildung die **durch σ induzierte Permutationsabbildung** auf $V^{\otimes r}$.

Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$

Lemma 26.2

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

- 1 Für jedes $\sigma \in S_r$ definiert die Abbildung P_σ einen Automorphismus von $V^{\otimes r}$.
- 2 Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_r$ gilt

$$P_{\sigma_1} \circ P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$$

Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$

Lemma 26.2

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

- ③ Ist B_V eine Basis von V , $A = \Phi_{B_V \otimes \dots \otimes B_V}^{-1}(t)$ die Komponentenhypermatrix von $t \in V^{\otimes r}$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$

$$(a^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}})_{(i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n \rrbracket} = \Phi_{B_V \otimes \dots \otimes B_V}^{-1}(P_\sigma(t))$$

- ④ Betrachten wir den Tensor $t \in V^{\otimes r}$ als Multilinearform in $\text{Mult}(V^*, \dots, V^*; K)$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$P_\sigma(t)(v^1, \dots, v^r) = t(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(r)})$$

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$.

- 1 Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = t$$

Wir setzen

$$V_{\text{sym}}^{\otimes r} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist symmetrisch}\}$$

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$.

- ② Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma) t$$

Wir setzen

$$V_{\text{skew}}^{\otimes r} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist schiefsymmetrisch}\}$$

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$.

- ③ Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) alternierend**, wenn für alle $v^1, \dots, v^r \in V^*$ gilt:

$$v^i = v^j \text{ für ein } i \neq j \quad \Rightarrow \quad t(v^1, \dots, v^r) = 0$$

Wir setzen

$$V_{\text{alt}}^{\otimes r} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist alternierend}\}$$

alternierende Tensoren erkennen lineare Abhängigkeit

Lemma 26.4

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $t \in V^{\otimes r}$. Dann sind äquivalent:

- 1 Der Tensor t ist alternierend.
- 2 Für linear abhängige Familien (v^1, \dots, v^r) von Vektoren in V^* gilt $t(v^1, \dots, v^r) = 0$.

Beweis.

Zusammenhang zwischen den Symmetrie-Eigenschaften

Lemma 26.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

- 1 Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt $V_{\text{sym}}^{\otimes r} = V_{\text{skew}}^{\otimes r} = V_{\text{alt}}^{\otimes r} = V^{\otimes r}$.
- 2 $V_{\text{alt}}^{\otimes r} \subseteq V_{\text{skew}}^{\otimes r}$.
- 3 Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ gilt sogar $V_{\text{alt}}^{\otimes r} = V_{\text{skew}}^{\otimes r}$.
- 4 Im Fall $\text{char}(K) = 2$ gilt $V_{\text{sym}}^{\otimes r} = V_{\text{skew}}^{\otimes r}$.
- 5 $V_{\text{sym}}^{\otimes r}$, $V_{\text{skew}}^{\otimes r}$ und $V_{\text{alt}}^{\otimes r}$ sind Unterräume von $V^{\otimes r}$.

Symmetrie anhand der Hypermatrizen

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V .

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermatrix $A = \Phi_{B_V^{\otimes \dots \otimes V}}^{-1}(t)$ sind äquivalent:

- 1 t ist symmetrisch, also $t \in V_{\text{sym}}^{\otimes r}$.
- 2 A ist **symmetrisch**, d. h., A erfüllt

$$a^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} = a^{i_1, \dots, i_r}$$

für alle $i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Symmetrie anhand der Hypermatrizen

Beispiel 26.7

$$K = \mathbb{Q}, r = 3 \text{ und } n = \dim(V) = 3$$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist symmetrisch.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die zehn **markierten** Einträge an den Positionen $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$ und $(3, 3, 3)$ eindeutig bestimmt, die unabhängig voneinander gewählt werden können.

Schiefsymmetrie anhand der Hypermatrizen

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V .

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermatrix $A = \Phi_{B_V^{\otimes \dots \otimes V}}^{-1}(t)$ sind äquivalent:

- 3 t ist schiefsymmetrisch, also $t \in V_{\text{skew}}^{\otimes r}$.
- 4 A ist **schiefsymmetrisch**, d. h., A erfüllt

$$a^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} = (\text{sgn } \sigma) a^{i_1, \dots, i_r}$$

für alle $i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Schiefsymmetrie anhand der Hypermatrizen

Beispiel 26.7

$$K = \mathbb{Q}, r = 3 \text{ und } n = \dim(V) = 3$$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist schiefsymmetrisch und wegen Lemma 26.5 auch alternierend.

Die Komponentenhypermatrix ist durch den einzigen **markierten** Eintrag an der Position $(1, 2, 3)$ bereits eindeutig bestimmt. Alle Positionen mit wiederholten Indizes sind Null!

Schiefsymmetrie anhand der Hypermatrizen

Beispiel 26.7

$$K = \mathbb{Q}, r = 3 \text{ und } n = \dim(V) = 4$$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & -1 & \cdot & 3 \\ \cdot & -2 & -3 & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 4 \\ 2 & \cdot & -4 & \cdot \end{bmatrix}$$
$$a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{1} & \cdot & -3 \\ -1 & \cdot & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 4} = \begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdot \\ -2 & \cdot & \mathbf{4} & \cdot \\ -3 & -4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist schiefsymmetrisch und wegen Lemma 26.5 auch alternierend.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die vier **markierten** Einträge an den Positionen $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ und $(2, 3, 4)$ eindeutig bestimmt, die unabhängig voneinander gewählt werden können.

Alternierende Eigenschaft anhand der Hypermatrixn

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V .

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermatrix $A = \Phi_{B_V^{\otimes \dots \otimes V}}^{-1}(t)$ sind äquivalent:

- 5 t ist alternierend, also $t \in V_{\text{alt}}^{\otimes r}$.
- 6 A ist alternierend, d. h., A erfüllt

$$a^{i_1, \dots, i_r} = 0 \text{ für alle } i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ mit } i_j = i_k \text{ für ein } j \neq k$$

und zusätzlich die Bedingungen der Schiefsymmetrie:

$$a^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} = (\text{sgn } \sigma) a^{i_1, \dots, i_r}$$

für alle $i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Alternierende Eigenschaft anhand der Hypermatrixen

Beispiel 26.7

$$K = \mathbb{Z}_2, r = 3 \text{ und } n = \dim(V) = 4$$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdot \end{bmatrix} a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \end{bmatrix} a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} a^{\bullet\bullet 4} = \begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdot \\ \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist alternierend und wegen Lemma 26.5 auch schiefsymmetrisch.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die **vier Gruppen verschiedenfarbig markierter** Einträge an den Positionen (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) und (2, 3, 4) eindeutig bestimmt.

In jeder dieser vier Gruppen können wir die Einträge unabhängig voneinander als 0 oder 1 wählen und erhalten so alle $2^4 = 16$ verschiedenen Tensoren in $V_{\text{alt}}^{\otimes 3}$.

Satz 26.8

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sowie $r \in \mathbb{N}_0$.

①

$$\dim(V_{\text{sym}}^{\otimes r}) = \binom{n+r-1}{r} = \begin{cases} \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} & \text{falls } n \geq 1 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

$$\dim(V_{\text{alt}}^{\otimes r}) = \binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{falls } n \geq r \\ 0 & \text{falls } n < r \end{cases}$$

② Es folgt $\dim(V_{\text{alt}}^{\otimes r}) = 1$ für $n = r$ und $\dim(V_{\text{alt}}^{\otimes r}) = 0$ für $n < r$.

③ Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ gilt $\dim(V_{\text{skew}}^{\otimes r}) = \dim(V_{\text{alt}}^{\otimes r})$.

④ Im Fall $\text{char}(K) = 2$ gilt $\dim(V_{\text{skew}}^{\otimes r}) = \dim(V_{\text{sym}}^{\otimes r})$.

Bemerkung 26.9

Für Matrizen konnten wir (zumindest im Fall $\text{char}(K) \neq 2$)

$$K^{n \times n} = K_{\text{sym}}^{n \times n} \oplus K_{\text{skew}}^{n \times n}$$

zeigen, sodass jede $n \times n$ -Matrix eindeutig dargestellt werden kann als Summe ihres symmetrischen und ihres schief-symmetrischen Anteils. Das stimmt im Fall von $V^{\otimes r}$ mit $r \geq 3$ nicht mehr:

n	$r = 2$			$r = 3$		
	$V^{\otimes 2}$	$V_{\text{sym}}^{\otimes 2}$	$V_{\text{skew}}^{\otimes 2}$	$V^{\otimes 3}$	$V_{\text{sym}}^{\otimes 3}$	$V_{\text{skew}}^{\otimes 3}$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0
2	4	3	1	8	4	0
3	9	6	3	27	10	1
4	16	10	6	64	20	4

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\text{char}(K) = 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$.

- ① Der Endomorphismus (genannt die **Symmetrisierung**)

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \text{Sym}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t) \in V_{\text{sym}}^{\otimes r} \subseteq V^{\otimes r}$$

bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf symmetrische Tensoren in $V_{\text{sym}}^{\otimes r}$ ab.

Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\text{Sym}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V_{\text{sym}}^{\otimes r}$ ist.

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\text{char}(K) = 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$.

- ② Der Endomorphismus (genannt die **Schiefsymmetrisierung**)

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \text{Skew}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) P_{\sigma}(t) \in V_{\text{skew}}^{\otimes r} \subseteq V^{\otimes r}$$

bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf schiefsymmetrische Tensoren in $V_{\text{skew}}^{\otimes r}$ ab.

Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\text{Skew}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V_{\text{skew}}^{\otimes r}$ ist.