Lineare Algebra II

Woche 04

05.05.2026 und 07.05.2026

§ 24 Multilineare Abbildungen und das mehrfache Tensorprodukt von Vektorräumen

$N \in \mathbb{N}_0$

Definition 24.1 vgl. Definition 23.1

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ sowie W Vektorräume über demselben Körper K.

1. Eine Abbildung

$$m \colon \bigtimes_{k=1}^{N} V_k = \underbrace{V_1 \times \cdots \times V_N}_{\text{kart. Produkt}} \to W$$

N-linear

heißt **multilinear**, wenn für jedes $i \in [\![1, N]\!]$ und alle fest gewählten $v_j \in V_j$ mit $j \in [\![1, N]\!] \setminus \{i\}$ die Abbildung

$$V_i \ni v_i \mapsto m(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_N) \in W$$

linear ist.

2. Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_N \to W$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\operatorname{Mult}(V_1, \ldots, V_N; W)$.

Definition 24.1 vgl. Definition 23.1

Es seien $V_1, \dots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper K.

3. Eine multilineare Abbildung in den Vektorraum K nennen wir eine **Multilinearform** auf $V_1 \times \dots \times V_N$.
   N-Linearform
4. Die Menge aller Multilinearformen $V_1 \times \dots \times V_N \to K$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_N; K)$ oder kurz mit $\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_N)$.

Bemerkung 24.2

1. Im Fall $N = 0$ besteht das kartesische Produkt $V_1 \times \cdots \times V_N$ nur aus dem leeren Tupel $()$. Jede Abbildung $\{()\} \to W$ ist dann multilinear. (keine Bedingung)

2. Im Fall $N = 1$ sind die multilinearen Abbildungen $V_1 \to W$ gerade die linearen Abbildungen:

$$\operatorname{Mult}(V_1; W) = \operatorname{Homo}(V_1, W)$$

3. Im Fall $N = 2$ sind die multilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \to W$ gerade die bilinearen Abbildungen aus § 23:

$$\operatorname{Mult}(V_1, V_2; W) = \operatorname{Bil}(V_1, V_2; W)$$

Beispiele 3-linearer Abbildungen — vgl. Beispiel 23.2

1. Für jeden Körper K ist die Abbildung

$$K \times K \times K \ni (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha\,\beta\,\gamma \in K$$

eine 3-Linearform auf $K \times K \times K$.

2. Für jeden Körper K und $n, m, \ell, p \in \mathbb{N}_0$ ist das Matrix-Produkt

$$K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \times K^{\ell \times p} \ni (A, B, C) \mapsto A\,B\,C \in K^{n \times p}$$

ist eine 3-lineare Abbildung in $\operatorname{Mult}(K^{n \times m}, K^{m \times \ell}, K^{\ell \times p}; K^{n \times p})$.

3. Für jede Menge X und jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist die punktweise Multiplikation von drei Funktionen $X \to K$, also

$$K^X \times K^X \times K^X \ni (f, g, h) \mapsto f \cdot g \cdot h \in K^X,$$

eine 3-lineare Abbildung in $\operatorname{Mult}(K^X, K^X, K^X; K^X)$.

multilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Satz 24.3 vgl. Satz 23.3

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ sowie W Vektorräume über demselben Körper.

Dann ist $\operatorname{Mult}(V_1, \ldots, V_N; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{V_1 \times \cdots \times V_N} = \{f \colon V_1 \times \cdots \times V_N \to W\}$$

aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_N \to W$.

Existenz und Eindeutigkeit multilinearer Abbildungen

Satz 24.4 — vgl. Satz 23.4

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \dots, V_N$ sowie W Vektorräume über demselben Körper. Weiter seien

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$
- $(w_{i_1,\dots,i_N})_{(i_1,\dots,i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ eine Familie von Vektoren in W

Dann gibt es genau eine N-lineare Abbildung

$$m\colon V_1 \times \dots \times V_N \to W$$

mit der Eigenschaft

$$m(\underbrace{v_{1,i_1}, \dots, v_{N,i_N}}_{\text{N-Tupel von Basisvektoren}}) = w_{i_1,\dots,i_N} \quad \text{für alle } (i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N$$

Tensorprodukt, universelle multilineare Abbildung

$$
\begin{tikzcd}
\bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[d, "f"] \\
& W
\end{tikzcd}
$$

Definition 24.5 — vgl. Definition 23.6

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K. Weiter seien $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ ein K-Vektorraum und $\otimes\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to \bigotimes_{k=1}^N V_k$ N-linear.

1. Das Paar $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von $V_1, \ldots, V_N$, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

   Für jede N-lineare Abbildung $m\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, W)$ mit $m = f \circ \otimes$, also

$$m(v_1, \ldots, v_N) = f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \quad \text{für alle } v_k \in V_k$$

Tensorprodukt, universelle multilineare Abbildung

Wir schreiben $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$
statt $\otimes(v_1, \dots, v_N)$.

$$\begin{tikzcd}
\bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[d, "f"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

$\bigotimes_{k=1}^N V_k$

Definition 24.5 — vgl. Definition 23.6

Es seien $V_1, \dots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K. Weiter sei $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$.

2. Dabei heißt $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ der **Tensorproduktraum**. Die Elemente von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißen **Tensoren**. Der Nullvektor in $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißt der **Nulltensor**.
3. $\otimes\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to \bigotimes_{k=1}^N V_k$ heißt die **universelle multilineare Abbildung** des Tensorprodukts $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$.

   ein Bild von $\otimes$

   Tensoren der Form $\boxed{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N}$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**. $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ heißt auch das **Tensorprodukt** der Vektoren $v_1, \dots v_N$.

Satz 24.6 vgl. Satz 23.8

Es seien $V_1, \dots, V_N, W$ Vektorräume über demselben Körper K und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$.

$$\begin{tikzcd} \bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Def. 24.5

1. Zu jeder N-linearen Abbildung $m \colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $f \colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$ mit der Eigenschaft $m = f \circ \otimes$, also $m(v_1, \dots, v_N) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)$ für alle $v_k \in V_k$.
2. Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung $f \colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$ durch $f \circ \otimes \colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \ni (v_1, \dots, v_N) \mapsto f(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) \in W$ eine N-lineare Abbildung definiert.
3. $$\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_N; W) \ni m \mapsto f \in \operatorname{Homo}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, W)$$

   ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

Angabe linearer Abbildungen auf Tensorprodukträumen

Wie definieren wir eine lineare Abbildung $f\colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$?

$$\begin{tikzcd} \bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Satz 24.6: Es gibt genau eine lineare Abb. $f\colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$

festgelegt durch $f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \underbrace{m(v_1, \ldots, v_N)}_{N\text{-linear}}$.

Lineare Abbildungen $f\colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$ werden eindeutig durch ihre Bilder auf den Elementartensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ festgelegt, sofern die zugehörige Abbildungsvorschrift N-linear ist.

„Es sei $f\colon \bigotimes_{k=1}^N V_k \to W$ diejenige lineare Abbildung, deren Bilder auf Elementartensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ durch die (N-lineare) Abbildungsvorschrift … festgelegt sind."

Angabe linearer Abbildungen auf Tensorprodukträumen

Beispiel vgl. Beispiel 23.10

1. Es sei $m\colon K^{n\times m} \times K^{m\times \ell} \times K^{\ell\times p} \to K^{n\times p}$ mit $m(A, B, C) = A\,B\,C$.

   Die zugehörige lineare Abbildung

   $$f\colon K^{n\times m} \otimes K^{m\times \ell} \otimes K^{\ell\times p} \to K^{n\times p}$$

   ist durch die Bilder $f(A \otimes B \otimes C) = A\,B\,C$ auf den Elementartensoren $A \otimes B \otimes C$ für $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times \ell}$ und $C \in K^{\ell\times p}$ eindeutig festgelegt.

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Satz 24.8 $V_1, \dots, V_N$ — vgl. Satz 23.11

Es seien ~~U und~~ V Vektorräume über demselben Körper K.

1. Sind $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ und $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte von $V_1, \dots, V_N$, dann gibt es $I \in \operatorname{Iso}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\otimes} = I \circ \otimes$, d. h., folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & \bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\widetilde{\otimes}"] & \\ \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[rr, "I"'] & & \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k \end{tikzcd}$$

Satz 24.8 $V_1, \dots, V_N$ **vgl. Satz 23.11**

Es seien ~~U und V~~ Vektorräume über demselben Körper K.

2. Ist $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$ und ist $I \in \operatorname{Iso}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$ ein Isomorphismus mit einem weiteren K-Vektorraum $\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k$, dann ist auch $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$ mit
$\widetilde{\otimes} := I \circ \otimes \colon \times_{k=1}^N V_k \to \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k$.

Beispiel 24.9

1. Ein 0-faches Tensorprodukt ($N = 0$) von K-Vektorräumen ist isomorph zum Körper K, d. h., es gilt $\bigotimes_{k=1}^{0} V_k \cong K$, und $\otimes\colon \{()\} \to K$ mit $\otimes(()) = 1$ ist eine zugehörige universelle 0-lineare Abbildung.

Wir prüfen die universelle Eigenschaft von $(K, \otimes)$:
Es sei $m: \bigtimes_{k=1}^{0} V_k = \{(\ )\} \to W$ eine beliebige (0-lineare) Abbildung. Gibt es eine eindeutige lineare Funktion $f\colon K \to W$ mit $m = f \circ \otimes$, also $m((\ )) = f(\otimes((\ ))) = f(1)$?
Ja!

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Beispiel 24.9

2. Ein 1-faches Tensorprodukt ($N = 1$) eines K-Vektorraumes V ist isomorph zum Vektorraum V selbst, und $\otimes \colon V \to V$ mit $\otimes(v) = v$ für alle $v \in V$ ist eine zugehörige universelle 1-lineare Abbildung.

3. Die 2-fachen Tensorprodukte $V_1 \otimes V_2$ von K-Vektorräumen V_1 und V_2 waren der Gegenstand von § 23.

Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem

Lemma 24.10 — vgl. Lemma 23.12

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$. Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Jeder Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ lässt sich also schreiben als Linearkombination von Elementartensoren:

$$t = \sum_{i=1}^n (\overset{\in K}{\alpha_i}\, v_{1,i}) \otimes \cdots \otimes v_{N,i}.$$

Die Koeffizienten α_i können o. B. d. A. alle als 1 gewählt werden.

Tensorproduktbasis

Lemma 24.11 — vgl. Lemma 23.13

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$. Weiter seien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von $V_1, \ldots, V_k$ für $k = 1, \ldots, N$. Dann gilt:

1. $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N}$ ist eine Basis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.
   Sie wird die von $B_{V_1}, \ldots, B_{V_N}$ **induzierte Basis** oder die **Tensorproduktbasis** zu $B_{V_1}, \ldots, B_{V_N}$ von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ genannt.

2. $\dim(\bigotimes_{k=1}^N V_k) = \prod_{k=1}^N \dim(V_k)$.

$N = 0$: 1

$N \geq 1$, mind. einmal $\dim(V_k) = 0$: 0

$N \geq 1$, alle $\dim(V_k) \geq 1$, mind. einmal $\dim(V_k) = \infty$: ∞

Rang eines Tensors

Definition 24.12 vgl. Definition 23.16

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$.

Der **Rang** eines Tensors $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$, geschrieben $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{N,i}$$

Rang eines Tensors im Fall $N \leqslant 3$

Bemerkung 24.13

uninteressant

1. Im Fall $N = 0$ haben alle Tensoren in $\bigotimes_{k=1}^{0} V_k \cong K$ bis auf den Nulltensor ($0 \in K$) den Rang 1.

2. Im Fall $N = 1$ haben ebenfalls alle Tensoren in $\bigotimes_{k=1}^{1} V_k \cong V_1$ bis auf den Nulltensor (der Nullvektor in V_1) den Rang 1.

3. Im Fall $N = 2$ gibt es Tensoren $t \in \bigotimes_{k=1}^{2} V_k \cong V_1 \otimes V_2$ mit $\operatorname{Rang}(t) = r$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leqslant \min\{\dim(V_1), \dim(V_2)\}$.

   Sind beide Dimensionen endlich, dann kann der Rang über den Rang einer Komponentenmatrix von t bestimmt werden.

Bemerkung 24.13

4. Im Fall $N \geqslant 3$ ist die Bestimmung des Ranges eines N-stufigen Tensors über vielen Körpern K ein NP-schweres Problem und über endlichen Körpern K ein NP-vollständiges Problem im Sinne der Komplexitätstheorie.

5. Selbst der maximal auftretende Rank eines N-stufigen Tensors in $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ ist im Fall $N \geqslant 3$ i. A. nicht bekannt, nicht einmal dann, wenn alle V_k dieselbe endliche Dimension besitzen. Bekannt sind im Fall $N = 3$ zur Zeit

$$\begin{aligned} \dim(V) = 2 \quad &\Rightarrow \quad \max\{\operatorname{Rang}(t) \mid t \in V \otimes V \otimes V\} = 3 \\ \dim(V) = 3 \quad &\Rightarrow \quad \max\{\operatorname{Rang}(t) \mid t \in V \otimes V \otimes V\} = 5 \end{aligned}$$

Die Bestimmung weiterer scharfer Schranken für den maximalen Rang eines N-stufigen Tensors ist ein aktives Forschungsgebiet.

Rang von Elementartensoren[AoC]

Lemma 24.14 vgl. Lemma 23.18

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$. Dann gilt:

1. Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
2. Für $v_k \in V_k$ mit $k = 1, \ldots, N$ gilt
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{mindestens ein } v_k \text{ ist der Nullvektor}$$
3. Jeder Elementartensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$, wobei alle $v_k \in V_k$ für $k = 1, \ldots, N$ ungleich dem Nullvektor sind, hat Rang 1.

Tensorprodukt linearer Abbildungen

Definition 24.15 — vgl. Definition 23.30

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $U_1, \ldots, U_N$ sowie $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N U_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U_1, \ldots, U_N$ sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$.

Dann heißt die für $u_k \in U_k$, $k = 1, \ldots, N$ durch

$$f_1 \boxtimes \cdots \boxtimes f_N \colon \begin{cases} U_1 \otimes \cdots \otimes U_N \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_N \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \mapsto \underbrace{f_1(u_1) \otimes \cdots \otimes f_N(u_N)}_{\text{N-linear}} \end{cases}$$

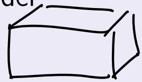
eindeutig bestimmte lineare Abbildung das **Tensorprodukt** der Abbildungen $f_1, \ldots, f_N$.

Hypermatrizen

Definition 24.16 — vgl. Definition 15.1

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

1. Eine N-fach indizierte Familie in K mit der Indexmenge $[\![1, n_1]\!] \times \cdots \times [\![1, n_N]\!]$ heißt eine **Hypermatrix** der **Stufe** oder **Ordnung** N oder auch eine ***N*-achsige Hypermatrix** der **Dimension** $n_1 \times \cdots \times n_N$ **über dem Körper** K.



$N=3$

   Wir schreiben eine Hypermatrix in der Form

$$A = (a_{i_1,\ldots,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in [\![1,n_1]\!] \times \cdots \times [\![1,n_N]\!]}$$

2. Die Menge aller Hypermatrizen der Dimension $n_1 \times \cdots \times n_N$ wird mit $K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ bezeichnet.

$K^{n_1 \times n_2}$

Definition 24.16

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

3. Sind $x_1 \in K^{n_1}, \ldots, x_N \in K^{n_N}$ Spaltenvektoren, so heißt diejenige N-achsige Hypermatrix A der Dimension $n_1 \times \cdots \times n_N$ mit

$$a_{i_1,\ldots,i_N} = \underbrace{x_{1,i_1}}_{i_1\text{-Koordinate von } x_1} \cdots \underbrace{x_{N,i_N}}_{i_N\text{-Koordinate von } x_N}$$

gegeben sind, das **äußere Produkt** der Vektoren $x_1, \ldots, x_N$.

$A = x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_N$

$x_1 \in K^{n_1} \cong \mathrm{Hom}(K, K^{n_1})$

$N = 2$

$A = x_1 x_2^T$

„dyadisches Produkt"

Hypermatrizen

Definition 24.16

Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N}_0$ sowie $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}_0$.

4. Der **Rang** einer Hypermatrix $A \in K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_1^{(i)} \boxtimes \cdots \boxtimes x_N^{(i)}$$

mit $x_k^{(i)} \in K^{n_k}$ für $k = 1, \ldots, N$ und $i = 1, \ldots, n$ möglich ist.

- stimmt für $N=2$ mit dem bekannten Rang überein
- für $N \geq 3$ schwierig zu bestimmen

Hypermatrizen

Bemerkung 24.17

1. Die Hypermatrizen der Dimension $n_1 \times \cdots \times n_N$ über dem Körper K bilden einen Vektorraum über K bezüglich der komponentenweisen Addition und S-Multiplikation.

2. Die Dimension dieses Vektorraumes $K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ ist $\prod_{k=1}^{N} n_k$.

3. Die Matrizen

$$E_{i_1,\ldots,i_N} = e_{i_1} \boxtimes \cdots \boxtimes e_{i_N}$$

genau ein Eintrag ist 1, bei $(i_1, \ldots, i_N)$

mit $i_k \in [\![1, n_k]\!]$ für $k = 1, \ldots, N$ bilden die **Standardbasis** von $K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$.

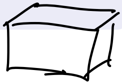
$N = 2$:

$$E_{ij} = e_i \boxtimes e_j = e_i e_j^T$$

Hypermatrizen

Bemerkung 24.17

4. Eine 0-achsige Hypermatrix ist eine Abbildung $\{()\} \to K$, kann als ein Skalar aus K aufgefasst werden.
5. Eine 1-achsige Hypermatrix kann als Vektor in K^{n_1} aufgefasst werden.
6. Eine 2-achsige Hypermatrix kann als Matrix in $K^{n_1 \times n_2}$ aufgefasst werden. Der Rang-Begriff aus Definition 24.16 stimmt mit dem bekannten Rang-Begriff für Matrizen überein.
7. Allgemein kann eine N-achsige Hypermatrix als ein N-dimensionales Array von Elementen des Körpers K verstanden werden.



Satz 24.18 vgl. Satz 23.34

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \ldots, N$. Weiter seien die Familien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ für $k = 1, \ldots, N$ Basen von $V_1, \ldots, V_N$ und $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$. Dann gilt:

1. Die Abbildung $\Phi_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}} : \underbrace{K^{n_1 \times \cdots \times n_N}}_{\text{Komp. hypermatrix}} \to \bigotimes_{k=1}^N V_k$, definiert durch

   Synthese

$$A \mapsto t := \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} a_{i_1,\ldots,i_N} \, (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N}),$$

   ist ein linearer Isomorphismus $K^{n_1 \times \cdots \times n_N} \to \bigotimes_{k=1}^N V_k$.

Darstellung von Tensoren

Satz 24.18 — vgl. Satz 23.34

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \ldots, N$. Weiter seien die Familien $B_{V_k} = (v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ für $k = 1, \ldots, N$ Basen von $V_1, \ldots, V_N$ und $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N} := (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$. Dann gilt:

2. Der zu $\Phi_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}}$ inverse Isomorphismus ist die Abbildung

Analyse

$$\Phi^{-1}_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}} : \bigotimes_{k=1}^N V_k \ni t \mapsto A \in K^{n_1 \times \cdots \times n_N},$$

Komp. hypermatrix

die jedem Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ seine eindeutige **Komponentenhypermatrix** $A \in K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ bzgl. der Basis $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}$ zuordnet.

Darstellung von Tensoren

Beispiel 24.19

1. 0-achsige Tensoren werden durch 0-achsige Hypermatrizen (Skalare) dargestellt.
2. 1-achsige Tensoren werden durch 1-achsige Hypermatrizen (Spaltenvektoren) dargestellt.
3. 2-achsige Tensoren werden durch 2-achsige Hypermatrizen (gewöhnliche Matrizen) dargestellt.
4. N-achsige Tensoren mit $N \geqslant 3$ werden durch N-achsige Hypermatrizen (N-dimensionale Arrays) dargestellt.

- Anzahl der Achsen N = Stufe des Tensors
  = Anzahl der Vektorräume im $\bigotimes^N$
- Anzahl der Einträge n_k entlang der k-ten Achse
  $= \dim(V_k)$

duales Tensorprodukt

Lemma 24.20 — vgl. Lemma 23.37

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$ sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume $V_1^*, \ldots, V_N^*$. Dann gilt:

Dualraum des Tensorpr. $\cong$ Tensorprodukt der Dualräume

1. Die Abbildung

$$\bigotimes_{k=1}^N V_k^* \to \Big(\bigotimes_{k=1}^N V_k\Big)^*$$

$$v_1^* \otimes \cdots \otimes v_N^* \mapsto v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^* = \overbrace{\langle v_1^*, \cdot \rangle \cdots \langle v_N^*, \cdot \rangle}^{\in K \cong K \otimes \cdots \otimes K}$$

$\in \mathrm{Homo}(V_1, K)$ 1

definiert einen kanonischen linearen Isomorphismus.

Dabei ist $v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^* \in (\bigotimes_{k=1}^N V_k)^*$ gegeben durch die Bilder auf den Elementartensoren, nämlich durch

$$(v_1^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_N^*)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) := \langle v_1^*, v_1 \rangle \cdots \langle v_N^*, v_N \rangle$$

duales Tensorprodukt

Lemma 24.20 vgl. Lemma 23.37

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$ sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume $V_1^*, \ldots, V_N^*$. Dann gilt:

2. Es seien $B_{V_k} = (v_{k,i_1}, \ldots, v_{k,n_k})$ für $k = 1, \ldots, N$ Basen von $V_1, \ldots, V_N$ und $B_{V_k}^* = (v_{k,1}^*, \ldots, v_{k,n_k}^*)$ die zugehörigen dualen Basen von $V_1^*, \ldots, V_N^*$. Dann ist

$$(v_{1,i_1}^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_{N,i_N}^*)_{(i_1,\ldots,i_N) \in [\![1,n_1]\!] \times \cdots \times [\![1,n_N]\!]}$$

die zu $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N} = (v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in [\![1,n_1]\!] \times \cdots \times [\![1,n_N]\!]}$ duale Basis von $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N)^*$.

$$t = \Phi_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad a_{i_1,\ldots,i_N} = \overbrace{(v_{1,i_1}^* \boxtimes \cdots \boxtimes v_{N,i_N}^*)}^{\text{Komp. ermitteln}}(t)$$

Rang eines Tensors ist Rang seiner Komp.hypermatrix

Satz 24.21 vgl. Satz 23.38

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über demselben Körper mit $\dim(V_k) = n_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \ldots, N$ sowie $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$. Weiter seien die Familien B_{V_k} für $k = 1, \ldots, N$ Basen von $V_1, \ldots, V_N$ und $B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}$ die induzierte Basis von $\bigotimes_{k=1}^N V_k$.

bel. Basen

Dann gilt für jeden Tensor $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ ein Tensor und $A \in K^{n_1 \times \cdots \times n_N}$ seine Komponentenhypermatrix $A = \Phi^{-1}_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}}(t)$:

$$\mathrm{Rang}(t) = \overbrace{\mathrm{Rang}(A)}$$

hängt nicht von den Basen ab

hängt von den Basen ab

für $N \geq 3$ schwierig zu bestimmen

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

- Ein Tensor in $U \otimes V \otimes W$ besitzt drei Eingänge, die Vektoren aus den jeweiligen Dualräumen U^*, V^*, W^* akzeptieren.
- Wird ein Eingang mit einem solchen Vektor belegt, so wird der Vektor vom Tensor „konsumiert". Der entsprechende Faktor aus dem Tensorproduktraum $U \otimes V \otimes W$ wird dabei „verbraucht" und verschwindet.
- Dieser Prozess kann auch mit mehreren Eingängen gleichzeitig geschehen.
- Das Ergebnis ist ein Tensor im Tensorproduktraum der nicht belegten Eingänge.

Durch die Belegung bzw. Nicht-Belegung der drei Eingänge gibt es acht verschiedene Möglichkeiten, einen Tensor in $U \otimes V \otimes W$ als lineare Abbildung zu nutzen.

belegte Eingänge

0 $\quad \operatorname{Homo}(K, U \otimes V \otimes W)$

1 $\quad \operatorname{Homo}(U^*, V \otimes W) \qquad \operatorname{Homo}(V^*, U \otimes W) \qquad \operatorname{Homo}(W^*, U \otimes V)$

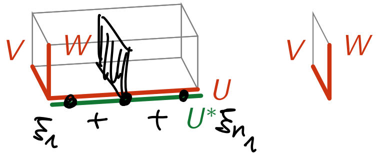
2 $\quad \operatorname{Homo}(U^* \otimes V^*, W) \qquad \operatorname{Homo}(U^* \otimes W^*, V) \qquad \operatorname{Homo}(V^* \otimes W^*, U)$

3 $\quad \operatorname{Homo}(U^* \otimes V^* \otimes W^*, K)$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Nur der erste Eingang U wird belegt:

$$U \otimes V \otimes W \xrightarrow{\text{Iso}} \operatorname{Homo}(U^*, V \otimes W)$$
$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot\,, u\rangle\,(v \otimes w) = \big[u^* \mapsto \underbrace{\langle u^*\,, u\rangle}_{\in K}\, v \otimes w\big]$$



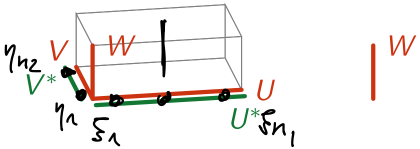
Enthält ξ die Koordinaten eines Vektors $u^* \in U^*$ bzgl. der Basis B_{U^*}, dann besitzt das Bild $\langle u^*\,, u\rangle\,(v \otimes w)$ von u^* die 2-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i\, a_{i\bullet\bullet}$$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Die ersten beiden Eingänge U und V werden belegt:

$$U \otimes V \otimes W \to \operatorname{Homo}(U^* \otimes V^*, W)$$
$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot\,, u \otimes v \rangle\, w = \left[u^* \otimes v^* \mapsto \langle u^*\,, u \rangle\, \langle v^*\,, v \rangle\, w \right]$$



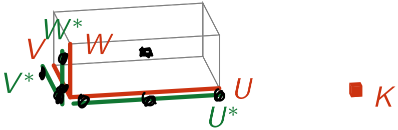
Enthalten ξ und η die Koordinaten von Vektoren $u^* \in U^*$ bzw. $v^* \in V^*$ bzgl. der Basis B_{U^*} bzw. B_{V^*}, dann besitzt das Bild $\langle u^*\,, u \rangle\, \langle v^*\,, v \rangle\, w$ des Elementartensors $u^* \otimes v^*$ die 1-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \xi_i\, \eta_j\, a_{ij\bullet}$$

3-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Es werden alle drei Eingänge U, V und W belegt:

$$U \otimes V \otimes W \to \operatorname{Homo}(U^* \otimes V^* \otimes W^*, K)$$
$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle \cdot \,, u \otimes v \otimes w \rangle = \big[u^* \otimes v^* \otimes w^* \mapsto \langle u^* \,, u \rangle \langle v^* \,, v \rangle \langle w^* \,, w \rangle\big]$$



Enthalten nun ξ, η und μ die Koordinaten von Vektoren $u^* \in U^*$, $v^* \in V^*$ bzw. $w^* \in W^*$ bzgl. der Basis B_{U^*}, B_{V^*} bzw. B_{W^*}, dann besitzt das Bild $\langle u^* \,, u \rangle \langle v^* \,, v \rangle \langle w^* \,, w \rangle$ des Elementartensors $u^* \otimes v^* \otimes w^*$ die 0-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \xi_i \, \eta_j \, \mu_k \, a_{ijk}$$

N-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

- Die gezeigten Beispiele illustrieren das **Einsetzen von Vektoren in einen Tensor** oder auch als **Kontraktion eines Tensors mit einem oder mehreren Vektoren**, z. B.

$$t(u^*, v^*, \cdot) := \langle u^*\,, u \rangle \, \langle v^*\,, v \rangle \, w$$

- Auf Ebene der Komponentenhypermatrix spricht man auch von der **Tensor-Vektor-Multiplikation** oder eigentlich **Hypermatrix-Vektor-Multiplikation**.

N-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Satz 24.23 — vgl. Satz 23.40

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \dots, V_N$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$.

belegte Eingänge

Weiter sei $s \in [\![0, N]\!]$ und π eine Permutation der Menge $[\![1, N]\!]$ mit der Eigenschaft $\boxed{\pi(1) < \cdots < \pi(s)}$ und $\pi(s+1) < \cdots < \pi(N)$. Dann gilt:

1. Es besteht der folgende kanonische Isomorphismus:

$$\bigotimes_{k=1}^{N} V_k \to \operatorname{Homo}\Big(\bigotimes_{k=1}^{s} V_{\pi(k)}^*, \bigotimes_{k=s+1}^{N} V_{\pi(k)}\Big)$$

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto \langle \cdot\,, v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(s)} \rangle \,(v_{\pi(s+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(N)})$$

N-achsige Tensoren als lineare Abbildungen

Satz 24.23 — vgl. Satz 23.40

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \dots, V_N$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_N$.

Weiter sei $s \in [\![0, N]\!]$ und π eine Permutation der Menge $[\![1, N]\!]$ mit der Eigenschaft $\pi(1) < \cdots < \pi(s)$ und $\pi(s+1) < \cdots < \pi(N)$. Dann gilt:

2. Es seien B_{V_k} Basen von $V_1, \dots, V_N$ und $B_{V_k}^*$ die zugehörigen dualen Basen von $V_1^*, \dots, V_N^*$. Weiter seien $A = \Phi^{-1}_{B_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_N}}(t)$ für $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ und $\xi_{\pi(k)}$ der Koordinatenvektor eines Vektors aus $V_{\pi(k)}^*$ bzgl. der Basis $B_{V_{\pi(k)}^*}$ für $k = 1, \dots, s$. Dann ist das Bild des Elementartensors $v_{\pi(1)}^* \otimes \cdots \otimes v_{\pi(s)}^*$ unter der obigen linearen Abbildung gegeben durch die Komponentenhypermatrix

$$\Big(\overbrace{\sum_{i_{\pi(1)}} \cdots \sum_{i_{\pi(s)}}}^{s \text{ Summen}} \xi_{\pi(1), i_{\pi(1)}} \cdots \xi_{\pi(s), i_{\pi(s)}} \, a_{i_1, \dots, i_N} \Big)_{(i_{\pi(s+1)}, \dots, i_{\pi(N)})}$$

Beispiel 24.24 $\mathrm{id}\colon K^{n\times m} \to K^{n\times m}$

1. Wir identifizieren $K^{n\times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\mathrm{id}\colon \underbrace{K^n \otimes K^m}_{\text{Eingabe}} \to K^n \otimes K^m \quad \cong \quad \overset{i}{(K^n)^*} \otimes \overset{j}{(K^m)^*} \otimes \overset{k}{K^n} \otimes \overset{\ell}{K^m}$$

$\hat{=}\ E_{ij}$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

E_{ij}

$$a_{ijk\ell} = \langle \underbrace{\pi_k \boxtimes \pi_\ell}_{\text{Komp. ermitteln}}, e_i \otimes e_j \rangle = \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}$$

$n^2 m^2$ Komponenten

$n\, m$ sind ungleich 0

Beispiel 24.24 $\qquad {\cdot}^{\mathsf{T}} : K^{n \times m} \to K^{m \times n}$

2. Wir betrachten die Transpositionsabbildung

$$\cdot^{\mathsf{T}} : K^n \otimes K^m \to K^m \otimes K^n \quad \cong \quad \overset{i}{(K^n)^*} \otimes \overset{j}{(K^m)^*} \otimes \overset{k}{K^m} \otimes \overset{\ell}{K^n}$$

Wir setzen $\underbrace{e_i \otimes e_j}_{}$ $\hat{=}\, E_{ij}$ in die Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$e_j \otimes e_i$

$$a_{ijk\ell} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell \,, e_j \otimes e_i \rangle = \delta_{i\ell}\, \delta_{jk}$$

$n^2 m^2$ Komponenten
nm sind ungleich 0

Beispiel 24.24 $\quad \cdot : K^{n\times m} \times K^{m\times \ell} \to K^{n\times \ell}$

3. Wir betrachten die Matrix-Matrix-Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \underbrace{K^n \otimes K^m \otimes K^m \otimes K^\ell}_{\text{Eingabe}} &\to K^n \otimes K^\ell \\ \cong \quad & \underset{a}{(K^n)^*} \otimes \underset{b}{(K^m)^*} \otimes \underset{c}{(K^m)^*} \otimes \underset{d}{(K^\ell)^*} \otimes \underset{e}{K^n} \otimes \underset{f}{K^\ell} \end{aligned}$$

$E_{ab} \cdot E_{cd}$

Das Bild der Matrix-Matrix-Multiplikationsabbildung der Basismatrizen E_{ab} und E_{cd} ist $\delta_{bc}\, E_{ad}$ bzw. $\boxed{\delta_{bc}\, e_a \otimes e_d}$. Die „Koordinatenermittler" $\pi_e \boxtimes \pi_f$ liefern

$$a_{abcdef} = \langle \pi_e \boxtimes \pi_f \,, \delta_{bc}\, e_a \otimes e_d \rangle = \delta_{bc}\, \delta_{ae}\, \delta_{df}$$

$n^2 m^2 \ell^2$ Komponenten

$n\, m\, \ell$ sind ungleich 0

Komplexität der Matrix-Matrix-Multiplikation

- Die direkte Anwendung der Matrix-Matrix-Multiplikationsformel für $C = A\,B$, also $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}$, erfordert $n\,m\,\ell$ Multiplikationen.
- Die Komponentenhypermatrix des Tensors, der zur Matrix-Matrix-Multiplikation gehört, besitzt bzgl. der Standardbasis die Einträge $\delta_{bc}\,\delta_{ae}\,\delta_{df}$, also $n\,m\,\ell$ Nicht-Null-Einträge.
- $n\,m\,\ell$ ist damit eine obere Schranke für den Tensorrang. Summe von äußeren Produkten von Standardbasisv.
- Strassens Algorithmus V. Strassen. „Gaussian elimination is not optimal". *Numerische Mathematik* 13.4 (1969), S. 354–356. DOI: 10.1007/bf02165411 zeigt, dass im Fall von $n = m = \ell = 2$ bereits 7 statt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ und allgemein $n^{\log_2(7)} \approx n^{2.81}$ Multiplikationen ausreichen.

Komplexität der Matrix-Matrix-Multiplikation

- Weitere Fortschritte durch AlphaTensor A. Fawzi u. a. „Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning“. *Nature* 610.7930 (2022), S. 47–53. DOI: 10.1038/s41586-022-05172-4 und Flip graphs J. Moosbauer, M. Poole. *Flip graphs with symmetry and new matrix multiplication schemes*. 2025. arXiv: 2502.04514

n	m	ℓ	vorherige obere Schranke	neue obere Schranke $K = \mathbb{Z}_2$	neue obere Schranke allgemein
2	2	2	7	7	7
3	3	3	23	23	23
4	4	4	49	47	49
5	5	5	98	93	93
3	4	5	48	47	47

§ 25 Tensoren über einem Vektorraum

Definition 25.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Für $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ heißt

$$\mathcal{T}^{(r,s)}(V) := \underbrace{\overset{\text{„kontravariant"}}{V \otimes \cdots \otimes V}}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{\overset{\text{„kovariant"}}{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}}_{s\text{-mal}}$$

r+s Achsen

der **Tensorproduktraum vom Typ (r, s) über dem Vektorraum V**. Die Elemente dieses Tensorproduktraumes heißen **Tensoren vom Typ (r, s)** über dem Vektorraum V.

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass V endlich-dimensional ist. Es gelte also $\dim(V) = \dim(V^*) = n \in \mathbb{N}_0$.

- Die Vektoren einer Basis des „primalen“ Raumes V werden mit unteren Indizes nummeriert.

  Wir bezeichnen diese typischerweise mit $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$.

  Die Koordinaten von Vektoren $v \in V$ bzgl. dieser Basis werden mit oberen Indizes notiert, also $v = \sum_{i=1}^n x^i \, v_i$.

- Die Covektoren der zu B_V dualen Basis von V^* werden mit oberen Indizes nummeriert.

  $\langle v^i , v_j \rangle = \delta_{ij}$

  Wir bezeichnen diese typischerweise mit $B_{V^*} = (v^1, \ldots, v^n)$.

  Die Koordinaten von Covektoren in V^* bzgl. dieser Basis werden mit unteren Indizes notiert, also $v^* = \sum_{i=1}^n x_i \, v^i$.

Darstellung von Tensoren

Tensorproduktbasis

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s}$$

alle Indizes laufen in $[\![1, n]\!]$

Darstellung von Tensoren $t \in \mathcal{T}^{(r,s)}(V)$

$$t = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} \underbrace{a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}}_{\text{Komponenten}} \, v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s}$$

A hat n^{r+s} Einträge

nur die Hom. beim Einsetzen „verrutschen nach vorne"

$$\mathcal{T}^{(0,0)}(V) \cong \operatorname{Homo}(K, K)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(0,1)}(V) &\cong \operatorname{Homo}(K, V^*) &&\cong \operatorname{Homo}(V, K) \\
\mathcal{T}^{(1,0)}(V) &\cong \operatorname{Homo}(K, V) &&\cong \operatorname{Homo}(V^*, K)
\end{aligned}$$

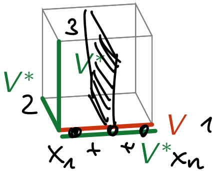
$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(0,2)}(V) &\cong \operatorname{Homo}(K, V^* \otimes V^*) &&\cong \operatorname{Homo}(V, V^*) &&\cong \operatorname{Homo}(V \otimes V, K) \\
\mathcal{T}^{(1,1)}(V) &\cong \operatorname{Homo}(K, V \otimes V^*) &&\cong \operatorname{Homo}(V, V) &&\cong \operatorname{Homo}(V^* \otimes V, K) \\
\mathcal{T}^{(2,0)}(V) &\cong \operatorname{Homo}(K, V \otimes V) &&\cong \operatorname{Homo}(V^*, V) &&\cong \operatorname{Homo}(V^* \otimes V^*, K)
\end{aligned}$$

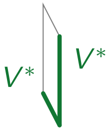
alles kanonische Isomorphismen

Tensoren in $V \otimes V^* \otimes V^*$ als lineare Abbildungen $\mathcal{T}^{(1,2)}(V)$

Nur der erste Eingang V wird belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \to \operatorname{Homo}(V^*, V^* \otimes V^*)$$
$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle \cdot\,, v_1 \rangle\, (v^2 \otimes v^3)$$



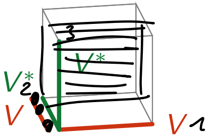


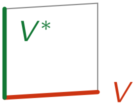
Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten eines Vektors $v^1 \in V^*$ bzgl. der Basis B_{V^*}, dann besitzt das Bild $\langle v^1\,, v_1 \rangle\, (v^2 \otimes v^3)$ von v^1 die 2-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, a_{i\bullet\bullet}$$

Nur der zweite Eingang V^* wird belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \to \operatorname{Homo}(V, V \otimes V^*)$$
$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle v^2, \cdot \rangle \, (v_1 \otimes v^3)$$





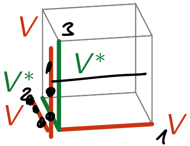
Sind $(y^1, \ldots, y^n)$ die Koordinaten eines Vektors $v_2 \in V$ bzgl. der Basis B_V, dann besitzt das Bild $\langle v^2, v_2 \rangle \, (v_1 \otimes v^3)$ von v_2 die 2-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{j=1}^{n} y^j \, a_{\bullet j \bullet}$$

Tensoren in $V \otimes V^* \otimes V^*$ als lineare Abbildungen

Die letzten beiden Eingänge V^* und V^* werden belegt:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \to \operatorname{Homo}(V \otimes V, V)$$
$$v_1 \otimes v^2 \otimes v^3 \mapsto \langle v^2 \otimes v^3, \cdot \rangle \, v_1$$



Sind $(y^1, \ldots, y^n)$ und $(z^1, \ldots, z^n)$ die Koordinaten von Vektoren $v_2, v_3 \in V$ bzgl. der Basis B_V, dann besitzt das Bild $\langle v^2, v_2 \rangle \langle v^3, v_3 \rangle \, v_1$ des Elementartensors $v_2 \otimes v_3$ die 1-achsige Komponentenhypermatrix

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} y^j \, z^k \, a_{\bullet jk}$$

Transformation von Komponentenmatrizen

$$B_V = (v_1, \ldots, v_n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n) \quad \text{Basen von } V$$

$$B_{V^*} = (v^1, \ldots, v^n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}^1, \ldots, \widehat{v}^n) \quad \text{Basen von } V^*$$

alt   neu

Übergangsmatrizen $T := \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \in K^{n\times n}$ und $\underline{T := \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \in K^{\overset{n \times n}{\cancel{n\times m}}}}$

$$\widehat{v}_j = \sum_{i=1}^n (T)_{ij}\, v_i \qquad \text{bzw.} \qquad v_i = \sum_{j=1}^n (T^{-1})_{ji}\, \widehat{v}_j$$

$$\text{und} \quad \widehat{v}^j = \sum_{i=1}^n (T^{-\mathsf{T}})_{ij}\, v^i \qquad \text{bzw.} \qquad v^j = \sum_{i=1}^n (T^{\mathsf{T}})_{ij}\, \widehat{v}^i$$

Transformation von Komponentenmatrizen im Fall $\mathcal{T}^{(1,1)}(V)$

Satz 25.4

$$v_i = \sum_{k=1}^n (T^{-1})_{ki}\,\widehat{v}_k \quad \text{und} \quad v^j = \sum_{\ell=1}^n (T^{\mathsf{T}})_{\ell j}\,\widehat{v}^\ell$$

$$t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^i_j\,(v_i \otimes v^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^i_j \left(\sum_{k=1}^n (T^{-1})_{ki}\,\widehat{v}_k\right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^n (T^{\mathsf{T}})_{\ell j}\,\widehat{v}^\ell\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (T^{-1})_{ki}\,(A)^i_j\,(T^{\mathsf{T}})_{\ell j}\,(\widehat{v}_k \otimes \widehat{v}^\ell)$$

$i \leftrightarrow k$

$j \leftrightarrow \ell$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (T^{-1})_{ik}\,(A)^k_\ell\,(T^{\mathsf{T}})_{j\ell}\,(\widehat{v}_i \otimes \widehat{v}^j)$$

$$\widehat{A}^i_j = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \underbrace{(T^{-1})_{ik}}_{\text{kontravariante Achse}}\,(A)^k_\ell\,\underbrace{(T^{\mathsf{T}})_{j\ell}}_{\text{kovariante Achse}}$$

§ 26 Symmetrische, schiefsymmetrische und alternierende Tensoren

Tensoren vom Typ $(r, 0)$

Wir betrachten Tensoren vom Typ $(r, 0)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ über einem endlich-dimensionalen Vektorraum V. Dennoch werden auch weiterhin duale Größen auftauchen, sodass wir auch hier primale Vektoren v_j und duale Vektoren v^j farblich unterscheiden wollen.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir

$$V^{\otimes r} := \mathcal{T}^{(r,0)}(V) = \bigotimes_{k=1}^{r} V$$

alle Faktoren sind identisch

Es gilt $V^{\otimes r} \cong \operatorname{Mult}(V^*, \ldots, V^*; K)$.

Wir interessieren uns insbesondere für Tensoren mit gewissen Symmetrieeigenschaften. Diese werden mithilfe von Permutationen $\sigma \in S_r$ beschrieben.

Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$

Definition 26.1

Es seien V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_r$ eine Permutation auf $[\![1, r]\!]$.

Dann heißt die durch

$$P_\sigma \colon \begin{cases} V^{\otimes r} \to V^{\otimes r} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \end{cases}$$

eindeutig definierte lineare Abbildung die **durch σ induzierte Permutationsabbildung** auf $V^{\otimes r}$.

Lemma 26.2

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Für jedes $\sigma \in S_r$ definiert die Abbildung P_σ einen Automorphismus von $V^{\otimes r}$.
2. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_r$ gilt

$$P_{\sigma_1} \circ P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$$

$$P_{\sigma_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \underbrace{v_{\sigma_2^{-1}(1)}}_{=:w_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{v_{\sigma_2^{-1}(r)}}_{=:w_r}$$

$$P_{\sigma_1}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_r) = w_{\sigma_1^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma_1^{-1}(r)}$$

$$= v_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(r))}$$

$$= v_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}(r)}$$

Permutationen eines Tensors vom Typ $(r, 0)$

Lemma 26.2

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

3. Ist B_V eine Basis von V, $A = \Phi^{-1}_{B_{V \otimes \cdots \otimes V}}(t)$ die Komponentenhypermatrix von $t \in V^{\otimes r}$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$

$$\left(a^{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}}\right)_{(i_1, \ldots, i_r) \in [\![1,n]\!] \times \cdots \times [\![1,n]\!]} = \underbrace{\Phi^{-1}_{B_{V \otimes \cdots \otimes V}}(P_\sigma(t))}_{\text{Komp.hypermatrix von } P_\sigma(t)}$$

4. Betrachten wir den Tensor $t \in V^{\otimes r}$ als Multilinearform in $\operatorname{Mult}(V^*, \ldots, V^*; K)$, dann gilt für jedes $\sigma \in S_r$:

$$P_\sigma(t)(v^1, \ldots, v^r) = t(v^{\sigma(1)}, \ldots, v^{\sigma(r)}) \in K$$

Reihenfolge wird vertauscht

symmetrische Tensoren

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = t$$

Wir setzen

$$V^{\otimes r}_{\text{sym}} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist symmetrisch}\}$$

Die Reihenfolge beim Einsetzen ist unerheblich!

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$. anti-symmetrisch

2. Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\pm 1 \in \mathbb{Z}}\, t$$

, zu verst. als $\pm 1 \in K$

Wir setzen

$$V^{\otimes r}_{\text{skew}} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist schiefsymmetrisch}\}$$

Das Vertauschen von zwei Vektoren beim Einsetzen ändert das Vorzeichen (falls $\operatorname{char}(K) \neq 2$).

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$.

3. Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt **(total) alternierend**, wenn für alle $v^1, \ldots, v^r \in V^*$ gilt:

$$v^i = v^j \text{ für ein } i \neq j \quad \Rightarrow \quad t(v^1, \ldots, v^r) = 0$$

Wir setzen

$$V^{\otimes r}_{\text{alt}} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist alternierend}\}$$

Wenn beim Einsetzen zwei Vektoren gleich sind, ist das Ergebnis $0 \in K$.

alternierende Tensoren erkennen lineare Abhängigkeit

Lemma 26.4

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $t \in V^{\otimes r}$. Dann sind äquivalent:

1. Der Tensor t ist alternierend.
2. Für linear abhängige Familien $(v^1, \ldots, v^r)$ von Vektoren in V^* gilt $t(v^1, \ldots, v^r) = 0$.

Beweis. ① ⇒ ②: $r = 0$: Es gibt keine linear abhängigen Familien.

$r = 1$: Lineare Abhängigkeit von (v^1) heißt $v^1 = 0 \Rightarrow t(v^1) = 0$

$r \geq 2$: $(v^1, \ldots, v^r)$ linear abhängig, dann gilt

$$v^i = \sum_{j=1, j \neq i}^{r} a_j v^j \text{ für ein } i \in [\![1, r]\!].$$

$$\Rightarrow t(v^1, \ldots, v^r) = t(v^1, \ldots, v^{i-1}, \sum_{j=1, j \neq i}^{r} \alpha_j v^j, v^{i+1}, \ldots, v^r)$$

$$= \sum_{j=1, j \neq i}^{r} \alpha_j t(v^1, \ldots, v^{i-1}, v^j, v^{i+1}, \ldots, v^r) = 0.$$

② ⇒ ①: $r \geq 2$: zwei Vektoren gleich $\Rightarrow (v^1, \ldots, v^r)$ lin. abh.

Zusammenhang zwischen den Symmetrie-Eigenschaften

Lemma 26.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}} = V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}$.
   Skalare Vektoren
2. $V^{\otimes r}_{\text{alt}} \subseteq V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
3. Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt sogar $V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
4. Im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
5. $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$, $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ und $V^{\otimes r}_{\text{alt}}$ sind Unterräume von $V^{\otimes r}$.

Symmetrie anhand der Hypermatrizen

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V.

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermartrix $A = \Phi^{-1}_{B_{V\otimes\cdots\otimes V}}(t)$ sind äquivalent:

1. t ist symmetrisch, also $t \in V^{\otimes r}_{\text{sym}}$.
2. A ist **symmetrisch**, d. h., A erfüllt

$$a^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}} = a^{i_1,\ldots,i_r}$$

für alle $i_1, \ldots, i_r \in [\![1, n]\!]$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

immer $r=3$ Achsen in den Beispielen

Beispiel 26.7 $K = \mathbb{Q}$ und $n = \dim(V) = 3$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist symmetrisch.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die zehn markierten Einträge an den Positionen $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,3)$, $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,3,3)$ und $(3,3,3)$ eindeutig bestimmt, die unabhängig voneinander gewählt werden können.

$\dim(V^{\otimes 3}_{\text{sym}}) = 10$

Schiefsymmetrie anhand der Hypermatrizen

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V.

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermartrix $A = \Phi^{-1}_{B_{V \otimes \cdots \otimes V}}(t)$ sind äquivalent:

3. t ist schiefsymmetrisch, also $t \in V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
4. A ist **schiefsymmetrisch**, d. h., A erfüllt

$$a^{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, a^{i_1, \ldots, i_r}$$

für alle $i_1, \ldots, i_r \in [\![1, n]\!]$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Beispiel 26.7 $K = \mathbb{Q}$ und $n = \dim(V) = 3$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \overset{=0}{\cdot} \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist schiefsymmetrisch und wegen Lemma 26.5 auch alternierend.

Die Komponentenhypermatrix ist durch den einzigen markierten Eintrag an der Position $(1, 2, 3)$ bereits eindeutig bestimmt. Alle Positionen mit wiederholten Indizes sind Null!

$\dim(V^{\otimes 3}_{\text{skew}}) = 1$

Schiefsymmetrie anhand der Hypermatrizen

Beispiel 26.7 $K = \mathbb{Q}$ und $n = \dim(V) = 4$

Der durch die Komponenten

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & -1 & \cdot & 3 \\ \cdot & -2 & -3 & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 4 \\ 2 & \cdot & -4 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & -3 \\ -1 & \cdot & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad a^{\bullet\bullet 4} = \begin{bmatrix} \cdot & 2 & 3 & \cdot \\ -2 & \cdot & 4 & \cdot \\ -3 & -4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist schiefsymmetrisch und wegen Lemma 26.5 auch alternierend.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die vier markierten Einträge an den Positionen $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,4)$ und $(2,3,4)$ eindeutig bestimmt, die unabhängig voneinander gewählt werden können.

$\dim(V^{\otimes 3}_{\text{skew}}) = 4$

Alternierende Eigenschaft anhand der Hypermatrizen

Lemma 26.6

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K und B_V eine Basis von V.

Für $r \in \mathbb{N}_0$, einen Tensor $t \in V^{\otimes r}$ und seine Komponentenhypermartrix $A = \Phi^{-1}_{B_{V\otimes\cdots\otimes V}}(t)$ sind äquivalent:

5. t ist alternierend, also $t \in V^{\otimes r}_{\text{alt}}$.
6. A ist **alternierend**, d. h., A erfüllt

$$a^{i_1,\ldots,i_r} = 0 \text{ für alle } i_1,\ldots,i_r \in [\![1,n]\!] \text{ mit } i_j = i_k \text{ für ein } j \neq k$$

char(K) ≠ 2

und zusätzlich die Bedingungen der Schiefsymmetrie:

$$a^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}} = (\operatorname{sgn}\sigma)\, a^{i_1,\ldots,i_r}$$

für alle $i_1,\ldots,i_r \in [\![1,n]\!]$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Alternierende Eigenschaft anhand der Hypermatrizen

Beispiel 26.7 $K = \mathbb{Z}_2$ und $n = \dim(V) = 4$

Der durch die Komponenten

$\neq 1$ noch schiefsymm, nicht mehr alternierend

$$a^{\bullet\bullet 1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad a^{\bullet\bullet 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad a^{\bullet\bullet 3} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad a^{\bullet\bullet 4} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

repräsentierte Tensor ist alternierend und wegen Lemma 26.5 auch schiefsymmetrisch.

Die Komponentenhypermatrix ist durch die vier Gruppen verschiedenfarbig markierter Einträge an den Positionen $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ und $(2, 3, 4)$ eindeutig bestimmt.

In jeder dieser vier Gruppen können wir die Einträge unabhängig voneinander als 0 oder 1 wählen und erhalten so alle $2^4 = 16$ verschiedenen Tensoren in $V_{\text{alt}}^{\otimes 3}$. $\dim(V_{\text{alt}}^{\otimes 3}) = 4$

Satz 26.8

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sowie $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Binomialkoeffizient

$$\dim(V^{\otimes r}_{\text{sym}}) = \binom{n+r-1}{r} = \begin{cases} \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} & \text{falls } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

$$\dim(V^{\otimes r}_{\text{alt}}) = \binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} & \text{falls } n \geqslant r \\ 0 & \text{falls } n < r \end{cases}$$

2. Es folgt $\underbrace{\dim(V^{\otimes r}_{\text{alt}}) = 1 \text{ für } n = r}_{\text{wichtig für Determinanten}}$ und $\dim(V^{\otimes r}_{\text{alt}}) = 0$ für $n < r$.

3. Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt $\dim(V^{\otimes r}_{\text{skew}}) = \dim(V^{\otimes r}_{\text{alt}})$.

4. Im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt $\dim(V^{\otimes r}_{\text{skew}}) = \dim(V^{\otimes r}_{\text{sym}})$.

Bemerkung 26.9

Für Matrizen konnten wir (zumindest im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$)

$$K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$$

$K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{alt}}$

zeigen, sodass jede $n \times n$-Matrix eindeutig dargestellt werden kann als Summe ihres symmetrischen und ihres schiefsymmetrischen Anteils. Das stimmt im Fall von $V^{\otimes r}$ mit $r \geqslant 3$ nicht mehr:

	Matrizen $r = 2$			$r = 3$		
n	$V^{\otimes 2}$	$V^{\otimes 2}_{\text{sym}}$	$V^{\otimes 2}_{\text{skew}}$	$V^{\otimes 3}$	$V^{\otimes 3}_{\text{sym}}$	$V^{\otimes 3}_{\text{skew}}$
0	0	= 0	+ 0	0	= 0	+ 0
1	1	= 1	+ 0	1	= 1	+ 0
2	4	= 3	+ 1	8	≠ 4	+ 0
3	9	= 6	+ 3	27	≠ 10	+ 1
4	16	= 10	+ 6	64	≠ 20	+ 4

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Der Endomorphismus (genannt die **Symmetrisierung**)

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \mathrm{Sym}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\mathrm{sym}} \subseteq V^{\otimes r}$$

bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf symmetrische Tensoren in $V^{\otimes r}_{\mathrm{sym}}$ ab.

Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\mathrm{Sym}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\mathrm{sym}}$ ist.

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) = 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$.

2. Der Endomorphismus (genannt die **Schiefsymmetrisierung**)

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Skew}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{skew}} \subseteq V^{\otimes r}$$

   bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf schiefsymmetrische Tensoren in $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ab.

   Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Skew}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ist.