# Lineare Algebra II

## Woche 03

28.04.2026 und 30.04.2026

# § 23.3 Eigenschaften des Tensorprodukts

# Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem

**Lemma 23.12**

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

Beweis.

# Tensorproduktbasis

## Lemma 23.12

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

Jeder Tensor $t \in U \otimes V$ lässt sich also schreiben als Linearkombination von Elementartensoren:

$$t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i \otimes v_i.$$

Die Koeffizienten $\alpha_i$ können alle als 1 gewählt werden.

# Tensorproduktbasis

## Lemma 23.13

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Weiter seien $B_U = (u_i)_{i \in I}$ bzw. $B_V = (v_j)_{j \in J}$ Basen von $U$ bzw. $V$. Dann gilt:

1. $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis von $U \otimes V$
2. $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$

# Beispiel eines Tensorprodukts

## Beispiel 23.14

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Z}_2$ und ein Tensorprodukt $K^2 \otimes K^2$.
Dieser Vektorraum hat Dimension 4, also $2^4 = 16$ Elemente:

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Darstellung als Linearkombination von Basistensoren bzgl. der Standardbasis $e_i \otimes e_j$

Darstellung mit möglichst wenigen Summanden

# Beispiel eines Tensorprodukts

## Beispiel 23.14 $K^2 \otimes K^2$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Darstellung als Linearkombination von Basistensoren bzgl. der Standardbasis $e_i \otimes e_j$

Darstellung mit möglichst wenigen Summanden

# Beispiel eines Tensorprodukts

## Beispiel 23.14 $K^2 \otimes K^2$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

### Bemerkung 23.15

1. Die Darstellung eines Tensors als Summe (Linearkombination) von irgendwelchen Elementartensoren ist nicht eindeutig.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Wir verwenden das Symbol $\otimes$ nicht im Sinne der Bemerkung 7.20, denn im Allgemeinen gilt

$$U \otimes V \neq$$

# Rang eines Tensors

## Definition 23.16

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$.

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

## Bemerkung 23.17

1. Da die Elementartensoren den ganzen Tensorproduktraum $U \otimes V$ erzeugen, ist der Rang jedes Tensors endlich.
2. In der Quantenmechanik bezeichnet man Tensoren vom Rang $\geqslant 2$ als **verschränkte Tensoren**.

# Rang von Elementartensoren[AoC]

## Lemma 23.18

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt:

1. Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
2. Für $u \in U$ und $v \in V$ gilt
$$u \otimes v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \text{ oder } v = 0$$
3. Jeder Elementartensor $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ ist vom Rang 1.

Beweis.

# Rang eines Tensors

**Beispiel 23.19** — vgl. Beispiel 23.14

Der Tensorproduktraum $\mathbb{Z}_2^2 \otimes \mathbb{Z}_2^2$ enthält

- einen Tensor vom Rang 0
- neun Tensoren vom Rang 1
- sechs Tensoren vom Rang 2

# isomorphe Tensorprodukte

## Beispiel 23.20

1. $K \otimes K \cong K$

2. $K \otimes U \cong U$ für jeden $K$-Vektorraum $U$

3. $U \otimes V \cong V \otimes U$ für beliebige $K$-Vektorräume $U$ und $V$

# Komplexifizierung eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes

## Beispiel 23.21

Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $(v_j)_{j \in J}$ und $U = \mathbb{C}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $(1, i)$. Dann bildet die Familie $(1 \otimes v_j)_{j \in J} \parallel (i \otimes v_j)_{j \in J}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C} \otimes V$. Jedes Element von $\mathbb{C} \otimes V$ hat also eine im Wesentlichen eindeutige Darstellung

$$\widehat{v} = \sum_{j \in J_0} \alpha_j \, (1 \otimes v_j) + \sum_{j \in J_0} \beta_j \, (i \otimes v_j) =: \sum_{j \in J_0} \gamma_j \otimes v_j$$

Wir können im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes V$ die S-Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{R}$ auf Skalare $\mu \in \mathbb{C}$ erweitern:

$$\mu \, \widehat{v} := \sum_{j \in J_0} (\mu \, \gamma_j) \otimes v_j.$$

Damit wird $\mathbb{C} \otimes V$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, der die **Komplexifizierung** des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V$ genannt wird.

# § 23.4 Konstruktion eines Tensorprodukts

# § 23.5 Das Tensorprodukt linearer Abbildungen

# Tensorprodukt linearer Abbildungen

## Definition 23.30

Es seien $U_1, U_2, V_1, V_2$ Vektorräume über demselben Körper und $(U_1 \otimes U_2, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U_1$ und $U_2$ sowie $(V_1 \otimes V_2, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1$ und $V_2$. Weiter seien $f_1 \in \operatorname{Homo}(U_1, V_1)$ und $f_2 \in \operatorname{Homo}(U_2, V_2)$.

Dann heißt die für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ durch

$$f_1 \boxtimes f_2 \colon \begin{cases} U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2 \\ u_1 \otimes u_2 \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \end{cases}$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung das **Tensorprodukt** der Abbildungen $f_1$ und $f_2$.

## Lemma 23.32

Es seien $U_1, U_2, V_1, V_2$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper $K$ mit Basen $B_{U_1}$, $B_{U_2}$, $B_{V_1}$ bzw. $B_{V_2}$. Weiter seien

$$f_1 \in \operatorname{Homo}(U_1, V_1) \quad \text{mit Darstellungsmatrix} \quad A = \mathcal{M}_{B_{V_1} \leftarrow B_{U_1}}(f_1)$$
$$f_2 \in \operatorname{Homo}(U_2, V_2) \quad \text{mit Darstellungsmatrix} \quad B = \mathcal{M}_{B_{V_2} \leftarrow B_{U_2}}(f_2).$$

Ordnen wir die Basen $B_{U_1 \otimes U_2}$ und $B_{V_1 \otimes V_2}$ lexikographisch, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_{V_1 \otimes V_2} \leftarrow B_{U_1 \otimes U_2}}(f_1 \boxtimes f_2) = A \boxtimes B \in K^{(n_1 n_2) \times (m_1 m_2)}$$

mit dem **Kroneckerprodukt** der Matrizen $A$ und $B$

$$A \boxtimes B := \begin{bmatrix} a_{11}\, B & a_{12}\, B & \cdots & a_{1m_1}\, B \\ a_{21}\, B & a_{22}\, B & \cdots & a_{2m_1}\, B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\, B & a_{n_1 2}\, B & \cdots & a_{n_1 m_1}\, B \end{bmatrix}$$

# § 23.6 Darstellung von Tensoren

# Darstellung von Tensoren

## Vektorraum $V$

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \;\cong\; K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$, dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j$$

## Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \;\cong\; K^{n \times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ Basen, dann repräsentiert eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j)$$

# Darstellung von Tensoren

## Satz 23.34

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Weiter seien die Familien $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ Basen von $U$ bzw. $V$ und $B_{U \otimes V} \coloneqq (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $U \otimes V$. Dann gilt:

1. Die Abbildung

$$\Phi_{B_{U \otimes V}} : K^{n \times m} \ni A \mapsto t \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j) \in U \otimes V$$

   ist ein linearer Isomorphismus $K^{n \times m} \to U \otimes V$.

# Darstellung von Tensoren

## Satz 23.34

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Weiter seien die Familien $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ Basen von $U$ bzw. $V$ und $B_{U \otimes V} \coloneqq (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $U \otimes V$. Dann gilt:

2. Der zu $\Phi_{B_{U \otimes V}}$ inverse Isomorphismus ist die Abbildung

$$\Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1} \colon U \otimes V \ni t \mapsto A \in K^{n \times m},$$

   die jedem Tensor $t \in U \otimes V$ seine eindeutige **Komponentenmatrix** $A \in K^{n \times m}$ bzgl. der Basis $B_{U \otimes V}$ zuordnet.

## Beispiel 23.35

Wählen wir in $K^n$ und $K^m$ die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ bzw. $(e_1, \ldots, e_m)$, dann besitzt der Basistensor $e_i \otimes e_j$ die Komponentenmatrix

$$\Phi^{-1}_{B_{K^n \otimes K^m}}(e_i \otimes e_j) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \uparrow j\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Die Komponentenmatrix des Elementartensors $x \otimes y$ ist

# Komponentenmatrix eines Tensors

## Beispiel 23.35

Ist

$$A = B\,C = \sum_{j=1}^{r} b_{\bullet j}\, c_{j\bullet}$$

irgendeine Faktorisierung, dann ist $A$ die Komponentenmatrix des Tensors

$$\Phi_{B_{K^n \otimes K^m}}(A) = \sum_{k=1}^{r} b_{\bullet k} \otimes c_{k\bullet}$$

Insbesondere ergibt sich, dass $A$ die Komponentenmatrix ist von

$$\Phi_{B_{K^n \otimes K^m}}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} \otimes e_j = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes a_{i\bullet}$$

## Bemerkung 23.36

Obwohl Satz 23.34 einen Isomorphismus zwischen Tensoren und ihren Komponentenmatrizen herstellt, sollten die beiden Konzepte nicht gleichgesetzt werden.

Wir sollten also einen Tensor nicht mit seiner Komponentenmatrix (bzgl. einer bestimmten Tensorproduktbasis) verwechseln, sondern die Komponentenmatrix als eine Darstellung des Tensors verstehen.

# Darstellung von Tensoren

## Vektorraum $V$

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \;\cong\; K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$, dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j = \Phi_{B_V}(x)$$

Die Koordinaten $x_j$ können mit Hilfe der zu $B_V$ dualen Basis von $V^*$ ermittelt werden.

## Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \;\cong\; K^{n \times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ Basen, dann repräsentiert eine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j) = \Phi_{B_{U \otimes V}}(A)$$

Die Komponenten $a_{ij}$ können mit Hilfe der zu $B_{U \otimes V}$ dualen Basis von $(U \otimes V)^*$ ermittelt werden.

# duales Tensorprodukt

## Lemma 23.37

Es seien $U$ und $V$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$ sowie $(U^* \otimes V^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume $U^*$ und $V^*$. Dann gilt:

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} U^* \otimes V^* &\to (U \otimes V)^* \\ u^* \otimes v^* &\mapsto u^* \boxtimes v^* = \langle u^*\,, \cdot \rangle \, \langle v^*\,, \cdot \rangle \end{aligned}$$

   definiert einen kanonischen linearen Isomorphismus.

   Dabei ist $u^* \boxtimes v^* \in (U \otimes V)^*$ gegeben durch die Bilder auf den Elementartensoren, nämlich durch

$$(u^* \boxtimes v^*)(u \otimes v) := \langle u^*\,, u \rangle \, \langle v^*\,, v \rangle$$

# duales Tensorprodukt

## Lemma 23.37

Es seien $U$ und $V$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$ sowie $(U^* \otimes V^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume $U^*$ und $V^*$. Dann gilt:

2. Es seien $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ Basen von $U$ und $V$ und $B_{U^*} = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ bzw. $B_{V^*} = (v_1^*, \ldots, v_m^*)$ die zugehörigen dualen Basen von $U^*$ von $V^*$. Dann ist

$$(u_i^* \boxtimes v_j^*)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$$

die zu $B_{U \otimes V} = (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$ duale Basis von $(U \otimes V)^*$.

$$t = \Phi_{B_{U \otimes V}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = (u_i^* \boxtimes v_j^*)(t)$$

# Rang eines Tensors ist Rang seiner Komponentenmatrix

## Satz 23.38

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper $K$ mit $\dim(U) = n \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ sowie $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Weiter seien die Familien $B_U$ und $B_V$ Basen von $U$ bzw. $V$ und $B_{U \otimes V}$ die induzierte Basis von $U \otimes V$.

Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ bzgl. der Basis $B_{U \otimes V}$:

$$\operatorname{Rang}(t) = \operatorname{Rang}(A)$$

# Rang eines Tensors ist Rang seiner Komponentenmatrix

$$\mathrm{Rang}(t) = \mathrm{Rang}(A)$$

Beweis.

## Folgerung 23.39

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt:

1. Für alle $t \in U \otimes V$ gilt $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$.

2. Hat mindestens einer der Räume $U$ und $V$ endliche Dimension, so gilt für alle $t \in U \otimes V$

   $$\operatorname{Rang}(t) \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}.$$

   Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}$ existiert ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\operatorname{Rang}(t) = r$.

3. Haben $U$ und $V$ beide unendliche Dimension, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\operatorname{Rang}(t) = r$.

# § 23.7 Transformation von Komponentenmatrizen bei Basiswechsel

# Transformation von Komponentenmatrizen

$$B_U = (u_1, \ldots, u_n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_U = (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_n) \quad \text{Basen von } U$$
$$B_V = (v_1, \ldots, v_m) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_m) \quad \text{Basen von } V$$

Übergangsmatrizen $S := \mathcal{T}_{B_U \leftarrow \widehat{B}_U} \in K^{n \times n}$ und $T := \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \in K^{m \times m}$

$$\widehat{u}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\, u_i \quad \text{bzw.} \quad u_i = \sum_{k=1}^{n} (S^{-1})_{ki}\, \widehat{u}_k$$
$$\text{und} \quad \widehat{v}_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij}\, v_i \quad \text{bzw.} \quad v_i = \sum_{\ell=1}^{m} (T^{-1})_{\ell i}\, \widehat{v}_\ell$$

# Transformation von Komponentenmatrizen

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} (S^{-1})_{ki}\, \widehat{u}_k \quad \text{und} \quad v_i = \sum_{\ell=1}^{m} (T^{-1})_{\ell i}\, \widehat{v}_\ell$$

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, (u_i \otimes v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n} (S^{-1})_{ki}\, \widehat{u}_k \right) \otimes \left( \sum_{\ell=1}^{m} (T^{-1})_{\ell j}\, \widehat{v}_\ell \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (S^{-1})_{ki}\, (A)_{ij}\, (T^{-\mathsf{T}})_{j\ell}\, \widehat{u}_k \otimes \widehat{v}_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \left( S^{-1} A\, T^{-\mathsf{T}} \right)_{k\ell} (\widehat{u}_k \otimes \widehat{v}_\ell) \end{aligned}$$

$$\widehat{A} = S^{-1} \quad A \quad T^{-\mathsf{T}}$$

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_U \leftarrow \widehat{B}_V^*}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_U \leftarrow B_U} \quad \mathcal{M}_{B_U \leftarrow B_{V^*}}(f) \quad \mathcal{T}_{B_{V^*} \leftarrow \widehat{B}_V^*}$$

# § 23.8 Tensoren als lineare Abbildungen

# Tensoren „sind“ lineare Abbildungen

## Satz 23.40

Es seien $U$ und $V$ endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper $K$ und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann besteht der folgende kanonische Isomorphismus, der durch seine Bilder auf den Elementartensoren eindeutig bestimmt ist:

$$I \colon U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto \langle \cdot\,, v \rangle\, u \in \operatorname{Homo}(V^*, U)$$

Sind $B_U$ bzw. $B_V$ Basen von $U$ bzw. von $V$ mit den zugehörigen dualen Basen $B_{U^*}$ bzw. $B_{V^*}$, dann gilt:

$$\Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t) = \mathcal{M}_{B_U \leftarrow B_{V^*}}(I(t))$$

# $U \otimes V \cong \text{Homo}(V^*, U)$

## Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j)$$

## Wirkung als lineare Abbildung in $\text{Homo}(V^*, U)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle \cdot \, , v_j \rangle \, u_i$$

## Einsetzen von $v^* = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \, v_j^* \in V^*$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle v^* \, , v_j \rangle \, u_i$$

# Homo($V^*$, $U$): Realisierung durch Komponentenmatrizen

Eingang $V^*$

Eingang $U^*$

$t \in U \otimes V$

$v^* \in V^*$

$t \in U \otimes V$

Koordinaten

Koordinaten

$A = \Phi^{-1}_{B_{U \otimes V}}(t)$

$\eta \in K^m$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

Das Resultat $\sum_{j=1}^{m} \eta_j \, a_{\bullet j} \in K^n$ repräsentiert einen Vektor aus $U$.

# $U \otimes V \cong \operatorname{Homo}(U^*, V)$

## Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j)$$

## Wirkung als lineare Abbildung in $\operatorname{Homo}(U^*, V)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle \cdot \, , u_j \rangle \, v_j$$

## Einsetzen von $u^* = \sum_{i=1}^n \xi_i \, u_i^* \in U^*$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle u^* \, , u_i \rangle \, v_j$$

# Homo($U^*$, $V$): Realisierung durch Komponentenmatrizen

Eingang $V^*$

Eingang $U^*$

$t \in U \otimes V$

Koordinaten

Koordinaten

$A = \Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t)$

$u^* \in U^*$

$t \in U \otimes V$

$\xi \in K^n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

Das Resultat $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, a_{i\bullet} \in K_m$ repräsentiert einen Vektor aus $V$.

# $U \otimes V \cong \operatorname{Homo}(U^* \otimes V^*, K)$

## Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (u_i \otimes v_j)$$

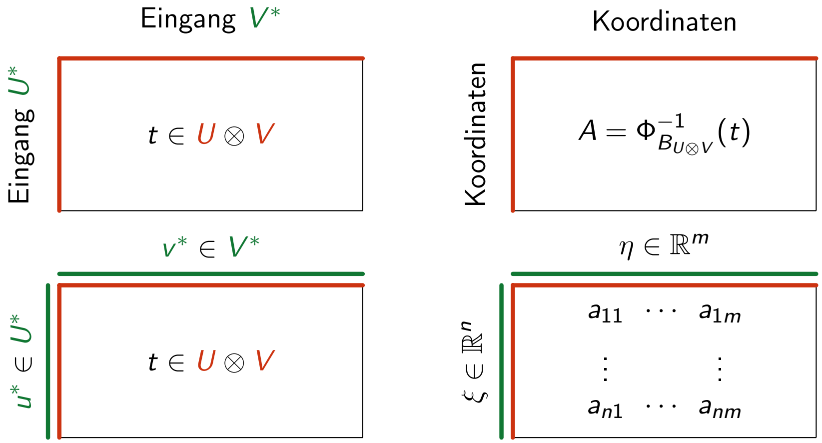
## Wirkung als lineare Abbildung in $\operatorname{Homo}(U^* \otimes V^*, K)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle \cdot \, , u_j \rangle \, \langle \cdot \, , v_j \rangle$$

## Einsetzen von $u^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, u_i^* \in U^*$ und $v^* = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \, v_j^* \in V^*$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \langle u^* \, , u_i \rangle \, \langle v^* \, , v_j \rangle$$

# Homo($U^* \otimes V^*, K$): Realisierung durch Komponentenmatr.




Das Resultat $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \xi_i \, \eta_j \, a_{ij} \in K$ ist eine Zahl.

# Zusammenfassung der kanonischen Isomorphismen

$$
\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Homo}(U^*, V) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Homo}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{Homo}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}
$$

- Ein Tensor in $U \otimes V$ kann an seinen beiden „Eingängen“ Vektoren aus $U^*$ bzw. $V^*$ entgegennehmen.
- Wird ein Eingang mit einem Vektor belegt, so wird er vom Tensor „konsumiert“. Der Faktor entsprechende Faktor in $U \otimes V$ wird dabei „verbraucht“.
- In Komponentendarstellung wird die entsprechende Achse mit dem Koordinatenvektor des anliegenden Vektors **kontrahiert**.