

Lineare Algebra II

Woche 03

28.04.2026 und 30.04.2026

§ 23.3 Eigenschaften des Tensorprodukts

Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem

Lemma 23.12

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper \mathbb{F} und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

Beweis. $W := \langle (u \otimes v) \mid (u, v) \in U \times V \rangle \subseteq U \otimes V$ Unterraum

kanonische Surjektion $\pi: U \otimes V \rightarrow U \otimes V / W$

$u \otimes v \in W \Rightarrow \pi(u \otimes v) = 0 \in U \otimes V / W \quad \forall u \in U \quad \forall v \in V$

Also ist $\pi \circ \otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V / W$ bilinear und

identisch zu $0 \circ \otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V / W$

Aus der univ. Eig. folgt $\pi = 0$, also $W = U \otimes V$.

Lemma 23.12

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

Jeder Tensor $t \in U \otimes V$ lässt sich also schreiben als Linearkombination von Elementartensoren:

$$t = \sum_{i=1}^n (\alpha_i u_i) \otimes v_i.$$

Die Koeffizienten α_i können alle als 1 gewählt werden.

Lemma 23.13

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Weiter seien $B_U = (u_i)_{i \in I}$ bzw. $B_V = (v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. V . Dann gilt:

- ① $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis von $U \otimes V$

Tensorproduktbasis, induzierte Basis

- ② $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$

$$\begin{array}{l} 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \\ n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty \\ \infty \cdot \infty = \infty \end{array} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel eines Tensorprodukts

Beispiel 23.14

u v

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Z}_2$ und ein Tensorprodukt $K^2 \otimes K^2$.
Dieser Vektorraum hat Dimension 4, also $2^4 = 16$ Elemente:

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

leere Summe

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darstellung als Linearkombination von
Basistensoren bzgl. der Standardbasis $e_i \otimes e_j$

Darstellung mit
möglichst wenigen
Summanden

Beispiel eines Tensorprodukts

Beispiel 23.14

 $K^2 \otimes K^2$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darstellung als Linearkombination von
Basistensoren bzgl. der Standardbasis $e_i \otimes e_j$

Darstellung mit
möglichst wenigen
Summanden

Bemerkung 23.15

- ① Die Darstellung eines Tensors als Summe (Linearkombination) von irgendwelchen Elementartensoren ist nicht eindeutig.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ② Wir verwenden das Symbol \otimes **nicht** im Sinne der Bemerkung 7.20, denn im Allgemeinen gilt

$$U \otimes V \neq \{ u \otimes v \mid u \in U, v \in V \}$$

alle Tensoren nur die einfachen

Rang eines Tensors

Definition 23.16

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\text{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i$$

$u_i \in U \quad v_i \in V$

Bemerkung 23.17

- 1 Da die Elementartensoren den ganzen Tensorproduktraum $U \otimes V$ erzeugen, ist der Rang jedes Tensors endlich.
- 2 In der Quantenmechanik bezeichnet man Tensoren vom Rang ≥ 2 als **verschränkte Tensoren**.

Lemma 23.18

Es seien U und V Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt:

- ① Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
- ② Für $u \in U$ und $v \in V$ gilt

$$u \otimes v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \text{ oder } v = 0$$

- ③ Jeder Elementartensor $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ ist vom Rang 1.

Beweis. ① Die leere Summe ist per Def. der Nulltensor.

② $u=0 \Rightarrow u \otimes v = (0u) \otimes v = 0(u \otimes v) = 0$

$$B_U = (u_i)_{i \in I}, B_V = (v_j)_{j \in J}, u = \sum_{i \in I_0} \alpha_i u_i \neq 0, v = \sum_{j \in J_0} \beta_j v_j \neq 0$$

indiv. Koeff. $\neq 0$

$$u \otimes v = \sum_{(i,j) \in I_0 \times J_0} \alpha_i \beta_j u_i \otimes v_j \neq 0$$

mind. ein Koeff. $\neq 0$

③ klar

Beispiel 23.19

vgl. Beispiel 23.14

Der Tensorproduktraum $\mathbb{Z}_2^2 \otimes \mathbb{Z}_2^2$ enthält

- einen Tensor vom Rang 0
- neun Tensoren vom Rang 1
- sechs Tensoren vom Rang 2

Beispiel 23.20

① $K \otimes K \cong K$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$$

② $K \otimes U \cong U$ für jeden K -Vektorraum U

$$\alpha \otimes u \mapsto \alpha u$$

③ $U \otimes V \cong V \otimes U$ für beliebige K -Vektorräume U und V

$$u \otimes v \mapsto v \otimes u$$

Komplexifizierung eines \mathbb{R} -Vektorraumes

Beispiel 23.21

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit der Basis $(v_j)_{j \in J}$ und $U = \mathbb{C}$ der \mathbb{R} -Vektorraum mit der Basis $(1, i)$. Dann bildet die Familie $(1 \otimes v_j)_{j \in J} \parallel (i \otimes v_j)_{j \in J}$ eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraumes $\mathbb{C} \otimes V$. Jedes Element von $\mathbb{C} \otimes V$ hat also eine im Wesentlichen eindeutige Darstellung

$$\hat{v} = \sum_{j \in J_0} \alpha_j (1 \otimes v_j) + \sum_{j \in J_0} \beta_j (i \otimes v_j) =: \sum_{j \in J_0} \gamma_j \otimes v_j$$

$\swarrow \in \mathbb{R}$ $\swarrow \in \mathbb{R}$ $\swarrow = \alpha_j + i\beta_j$
 $\uparrow \in \mathbb{C}$

Wir können im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{C} \otimes V$ die **S-Multiplikation** mit Skalaren in \mathbb{R} auf Skalare $\mu \in \mathbb{C}$ **erweitern**:

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes V) &= \det_{\mathbb{R}} V \\ \text{Basis } (1 \otimes v_j)_{j \in J} \end{aligned} \quad \mu \hat{v} := \sum_{j \in J_0} (\mu \gamma_j) \otimes v_j$$

\swarrow S-Mult. in \mathbb{C}

Damit wird $\mathbb{C} \otimes V$ zu einem \mathbb{C} -Vektorraum, der die **Komplexifizierung** des \mathbb{R} -Vektorraumes V genannt wird.

$$V \cong 1 \otimes V \subseteq \mathbb{C} \otimes V$$

\uparrow \mathbb{R} -Vektorraum \uparrow \mathbb{C} -Vektorraum

§ 23.4 Konstruktion eines Tensorprodukts

§ 23.5 Das Tensorprodukt linearer Abbildungen

Tensorprodukt linearer Abbildungen

Definition 23.30

Es seien U_1, U_2, V_1, V_2 Vektorräume über demselben Körper und $(U_1 \otimes U_2, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U_1 und U_2 sowie $(V_1 \otimes V_2, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1 und V_2 . Weiter seien $f_1 \in \text{Homo}(U_1, V_1)$ und $f_2 \in \text{Homo}(U_2, V_2)$.

Dann heißt die für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ durch

$$f_1 \boxtimes f_2: \begin{cases} U_1 \otimes U_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2 \\ u_1 \otimes u_2 \mapsto \underbrace{f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)}_{\text{bilinear}} \end{cases}$$

H: $f_1 \otimes f_2$ ↯

eindeutig bestimmte lineare Abbildung das **Tensorprodukt** der Abbildungen f_1 und f_2 .

Darstellungsmatrix des Tensorprodukts linearer Abbildungen

Lemma 23.32

Es seien U_1, U_2, V_1, V_2 endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_{U_1}, B_{U_2}, B_{V_1}$ bzw. B_{V_2} . Weiter seien

$$f_1 \in \text{Homo}(U_1, V_1) \quad \text{mit Darstellungsmatrix} \quad A = \mathcal{M}_{B_{V_1} \leftarrow B_{U_1}}(f_1)$$

$$f_2 \in \text{Homo}(U_2, V_2) \quad \text{mit Darstellungsmatrix} \quad B = \mathcal{M}_{B_{V_2} \leftarrow B_{U_2}}(f_2).$$

Ordnen wir die Basen $B_{U_1 \otimes U_2}$ und $B_{V_1 \otimes V_2}$ lexikographisch, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_{V_1 \otimes V_2} \leftarrow B_{U_1 \otimes U_2}}(f_1 \otimes f_2) = A \otimes B \in K^{(n_1 n_2) \times (m_1 m_2)}$$

mit dem **Kroneckerprodukt** der Matrizen A und B

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11} B & a_{12} B & \cdots & a_{1m_1} B \\ a_{21} B & a_{22} B & \cdots & a_{2m_1} B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1} B & a_{n_1 2} B & \cdots & a_{n_1 m_1} B \end{bmatrix}$$

§ 23.6 Darstellung von Tensoren

Darstellung von Tensoren

Vektorraum $V \in \mathbb{N}_0$

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \cong K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \Phi_B(x)$$

Synthese

Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n, \dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \cong K^{n \times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \dots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ Basen, dann repräsentiert eine **Matrix** $A \in K^{n \times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j)$$

Darstellung von Tensoren

Satz 23.34

$n, m \in \mathbb{N}_0$

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Weiter seien die Familien

$B_U = (u_1, \dots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ Basen von U bzw. V und $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $U \otimes V$. Dann gilt:

- 1 Die Abbildung (Synthese)

$$\Phi_{B_{U \otimes V}} : K^{n \times m} \ni A \mapsto t := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j) \in U \otimes V$$

\uparrow
Komponentenmatrix

ist ein linearer Isomorphismus $K^{n \times m} \rightarrow U \otimes V$.

Satz 23.34

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Weiter seien die Familien

$B_U = (u_1, \dots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ Basen von U bzw. V und $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$ die zugehörige Tensorproduktbasis von $U \otimes V$. Dann gilt:

- ② Der zu $\Phi_{B_{U \otimes V}}$ inverse Isomorphismus ist die Abbildung *(Analyse)*

$$\Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1} : U \otimes V \ni t \mapsto A \in K^{n \times m},$$

die jedem Tensor $t \in U \otimes V$ seine eindeutige

Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ bzgl. der Basis $B_{U \otimes V}$ zuordnet.

Komponentenmatrix eines Tensors

Beispiel 23.35

Wählen wir in K^n und K^m die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) bzw. (e_1, \dots, e_m) , dann besitzt der Basistensor $e_i \otimes e_j$ die Komponentenmatrix

$$\Phi_{B_{K^n \otimes K^m}}^{-1}(e_i \otimes e_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{matrix} = e_i e_j^T$$

Die Komponentenmatrix des Elementartensors $x \otimes y$ ist

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x \otimes y) &= \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i e_i) \otimes (y_j e_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \underbrace{\Phi^{-1}(e_i \otimes e_j)}_{= e_i e_j^T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j e_i e_j^T \\ &= e_i e_j^T = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \left(\sum_{j=1}^m y_j e_j\right)^T = x y^T \end{aligned}$$

Komponentenmatrix eines Tensors

Beispiel 23.35

Ist

$$\begin{array}{c}
 n \times m \quad n \times r \quad r \times m \\
 \boxed{A} = \boxed{B} \boxed{C} = \sum_{j=1}^r b_{\bullet j} c_{j\bullet}
 \end{array}$$

irgendeine Faktorisierung, dann ist A die Komponentenmatrix des Tensors

$$\Phi_{B_{K^n \otimes K^m}}(A) = \sum_{k=1}^r b_{\bullet k} \otimes c_{k\bullet}^T$$

\swarrow $A = A I_m = I_n A$

Insbesondere ergibt sich, dass A die Komponentenmatrix ist von

$$\Phi_{B_{K^n \otimes K^m}}(A) = \sum_{j=1}^m a_{\bullet j} \otimes e_j = \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_{i\bullet}^T$$

Bemerkung 23.36

Obwohl Satz 23.34 einen **Isomorphismus** zwischen Tensoren und ihren Komponentenmatrizen herstellt, sollten die beiden Konzepte **nicht gleichgesetzt** werden.

Wir sollten also einen Tensor nicht mit seiner Komponentenmatrix (bzgl. einer bestimmten Tensorproduktbasis) verwechseln, sondern die **Komponentenmatrix** als eine **Darstellung des Tensors** verstehen.

Darstellung von Tensoren

Vektorraum V

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \cong K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \Phi_{B_V}(x)$$

Die Koordinaten x_j können mit Hilfe der zu B_V **dualen Basis** von V^* ermittelt werden.

Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \cong K^{n \times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \dots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ Basen, dann repräsentiert eine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j) = \Phi_{B_U \otimes B_V}(A)$$

Die Komponenten a_{ij} können mit Hilfe der zu $B_U \otimes B_V$ **dualen Basis** von $(U \otimes V)^*$ ermittelt werden.

duales Tensorprodukt

Lemma 23.37

Es seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V sowie $(U^* \otimes V^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume U^* und V^* . Dann gilt:

① Die Abbildung

Dualraum eines
Tp. "ist" das Tp
des Dualräume

$$U^* \otimes V^* \rightarrow (U \otimes V)^*$$

$$u^* \otimes v^* \mapsto u^* \boxtimes v^* = \langle u^*, \cdot \rangle \langle v^*, \cdot \rangle$$

$$u^* \in \text{Homo}(U, K)$$

$$v^* \in \text{Homo}(V, K)$$

$$u^* \boxtimes v^* \in \text{Homo}(U \otimes V, \underbrace{K \otimes K}_{\cong K})$$

definiert einen kanonischen linearen Isomorphismus.

Dabei ist $u^* \boxtimes v^* \in (U \otimes V)^*$ gegeben durch die Bilder auf den Elementartensoren, nämlich durch

$$(u^* \boxtimes v^*)(u \otimes v) := \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle$$

duales Tensorprodukt

Lemma 23.37

Es seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper, $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V sowie $(U^* \otimes V^*, \otimes)$ ein Tensorprodukt der Dualräume U^* und V^* . Dann gilt:

- ② Es seien $B_U = (u_1, \dots, u_n)$ bzw. $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ Basen von U und V und $B_{U^*} = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ bzw. $B_{V^*} = (v_1^*, \dots, v_m^*)$ die zugehörigen dualen Basen von U^* von V^* . Dann ist

$(u_i^* \otimes v_j^*)$ ist Basis von $U^* \otimes V^*$ *dem isomorphe Bilder*
 $(u_i^* \boxtimes v_j^*)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$

die zu $B_{U \otimes V} = (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$ duale Basis von $(U \otimes V)^*$.

$$t = \Phi_{B_{U \otimes V}}(A) \Leftrightarrow a_{ij} = \underbrace{(u_i^* \boxtimes v_j^*)}_{\text{Komponenten } (c_{ij})}(t) = \left[\widehat{\Phi}^{-1}(t) \right]_{ij}$$

Rang eines Tensors ist Rang seiner Komponentenmatrix

Satz 23.38

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K mit $\dim(U) = n \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ sowie $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Weiter seien die Familien B_U und B_V Basen von U bzw. V und $B_{U \otimes V}$ die induzierte Basis von $U \otimes V$.

Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ bzgl. der Basis $B_{U \otimes V}$:

$$\text{Rang}(t) = \text{Rang}(A)$$

unabh. von den Basen

abh. von den Basen

Rang eines Tensors ist Rang seiner Komponentenmatrix

$$\text{Rang}(t) = \text{Rang}(A)$$

Beweis. $\text{Rang}(t) \leq \text{Rang}(A) : r := \text{Rang}(A)$, $A = BC$ eine Rangfaktorisierung (Fol. 15.16) mit $B \in K^{n \times r}$, $C \in K^{r \times m}$.

$$t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r b_{ik} c_{kj} (u_i \otimes v_j) \\ = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} u_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m c_{kj} v_j \right) \Rightarrow \text{Rang}(t) \leq \text{Rang}(A)$$

Basisvektoren

$$\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(t) \Rightarrow r$$

$$t = \sum_{k=1}^r u_k' \otimes v_k' = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} u_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m c_{kj} v_j \right)$$

irgendwelche Vektoren

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\sum_{k=1}^r b_{ik} c_{kj}}_{= a_{ij}} (u_i \otimes v_j)$$

$$\Rightarrow A = BC \Rightarrow \text{Rang}(A) \leq \min\{m, n, r\} \leq r$$

Satz 15.17

Folgerung 23.39

Es seien U und V Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt:

- 1 Für alle $t \in U \otimes V$ gilt $\text{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$.
- 2 Hat mindestens einer der Räume U und V endliche Dimension, so gilt für alle $t \in U \otimes V$

$$\text{Rang}(t) \leq \min\{\dim(U), \dim(V)\}.$$

Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leq \min\{\dim(U), \dim(V)\}$ existiert ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\text{Rang}(t) = r$.

- 3 Haben U und V beide unendliche Dimension, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\text{Rang}(t) = r$.

§ 23.7 Transformation von Komponentenmatrizen bei Basiswechsel

Transformation von Komponentenmatrizen

$$B_U = (u_1, \dots, u_n) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_U = (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_n) \quad \text{Basen von } U$$

$$B_V = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{und} \quad \widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_m) \quad \text{Basen von } V$$

alt

neu

Übergangsmatrizen $S := \mathcal{T}_{B_U \leftarrow \widehat{B}_U} \in K^{n \times n}$ und $T := \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \in K^{m \times m}$

$$\widehat{u}_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} u_i \quad \text{bzw.} \quad u_i = \sum_{k=1}^n (S^{-1})_{ki} \widehat{u}_k$$

$$\text{und} \quad \widehat{v}_j = \sum_{i=1}^m t_{ij} v_i \quad \text{bzw.} \quad v_i = \sum_{\ell=1}^m (T^{-1})_{\ell i} \widehat{v}_\ell$$

Transformation von Komponentenmatrizen

$$u_i = \sum_{k=1}^n (S^{-1})_{ki} \hat{u}_k \quad \text{und} \quad v_j = \sum_{\ell=1}^m (T^{-1})_{\ell j} \hat{v}_\ell$$

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n (S^{-1})_{ki} \hat{u}_k \right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^m (T^{-1})_{\ell j} \hat{v}_\ell \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (S^{-1})_{ki} (A)_{ij} (T^{-1})_{\ell j} \hat{u}_k \otimes \hat{v}_\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m (S^{-1} A T^{-1})_{k\ell} (\hat{u}_k \otimes \hat{v}_\ell) \end{aligned}$$

$$\hat{A} = S^{-1} A T^{-1}$$

genau wie $\mathcal{M}_{\hat{B}_U \leftarrow \hat{B}_V^*}(f) = \mathcal{T}_{\hat{B}_U \leftarrow B_U} \mathcal{M}_{B_U \leftarrow B_V^*}(f) \mathcal{T}_{B_V^* \leftarrow \hat{B}_V^*}$ Lemma 20.13

§ 23.8 Tensoren als lineare Abbildungen

Satz 23.40

Es seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann besteht der folgende kanonische Isomorphismus, der durch seine Bilder auf den Elementartensoren eindeutig bestimmt ist:

$$I: U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto \langle \cdot, v \rangle u \in \text{Homo}(V^*, U)$$

bilinear

Werte auf $v \in V^$*

Sind B_U bzw. B_V Basen von U bzw. von V mit den zugehörigen dualen Basen B_{U^*} bzw. B_{V^*} , dann gilt:

$$\Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t) = M_{B_U \leftarrow B_{V^*}}(I(t))$$

Komp. matrix

Darstellungsmatrix

$$U \otimes V \cong \text{Homo}(V^*, U)$$

Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j)$$

Wirkung als lineare Abbildung in $\text{Homo}(V^*, U)$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle \cdot, v_j \rangle u_i$$

Koordinaten

Einsetzen von $v^* = \sum_{j=1}^m \eta_j v_j^* \in V^*$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \underbrace{\langle v^*, v_j \rangle}_{\eta_j} u_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \eta_j \right)}_{\text{vgl. M.-V. - Prod.}} u_i$$

Homo(V^* , U): Realisierung durch Komponentenmatrizen

Eingang U^*

Eingang U^*

$$t \in U \otimes V$$

Koordinaten

$$A = \Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t)$$

$v^* \in V^*$

$$t \in U \otimes V$$

$\eta_1 \quad \eta \in K^m \quad \eta_m$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

Diese
Achse
der
Matrix
wird
kontra-
hert

Das Resultat $\sum_{j=1}^m \eta_j a_{\bullet j} \in K^n$ repräsentiert einen Vektor aus U .

$$U \otimes V \cong \text{Homo}(U^*, V)$$

Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j)$$

Wirkung als lineare Abbildung in $\text{Homo}(U^*, V)$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle \cdot, u_j \rangle v_j$$

Koordinaten

Einsetzen von $u^* = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i^* \in U^*$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \underbrace{\langle u^*, u_j \rangle}_{\xi_i} v_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \xi_i \right) v_j$$

" $\sum A$ "

Homo(U^* , V): Realisierung durch Komponentenmatrizen

Eingang V^*

Eingang U^*

$$t \in U \otimes V$$

Koordinaten

Koordinaten

$$A = \Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t)$$

$u^* \in U^*$

$$t \in U \otimes V$$

$\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{array}$$

Das Resultat $\sum_{i=1}^n \xi_i a_{i\bullet} \in K_m$ repräsentiert einen Vektor aus V .

$$U \otimes V \cong \text{Homo}(U^* \otimes V^*, K)$$

Komponentendarstellung von $t \in U \otimes V$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (u_i \otimes v_j)$$

Wirkung als lineare Abbildung in $\text{Homo}(U^* \otimes V^*, K)$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle \cdot, u_j \rangle \langle \cdot, v_j \rangle$$

Einsetzen von $u^* = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i^* \in U^*$ und $v^* = \sum_{j=1}^m \eta_j v_j^* \in V^*$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle u^*, u_i \rangle \langle v^*, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_i \eta_j$$

\square

Homo($U^* \otimes V^*, K$): Realisierung durch Komponentenmatr.

Eingang U^*

Eingang V^*

$$t \in U \otimes V$$

$v^* \in V^*$

$u^* \in U^*$

$$t \in U \otimes V$$

Koordinaten

$$A = \Phi_{B_{U \otimes V}}^{-1}(t)$$

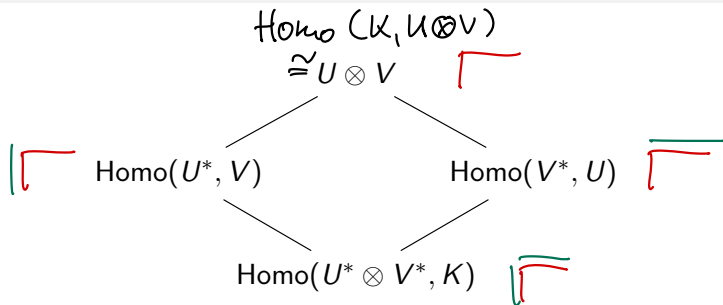
$\eta \in \mathbb{K}^m$

$\xi \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

Das Resultat $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_i \eta_j a_{ij} \in K$ ist eine Zahl.

Zusammenfassung der kanonischen Isomorphismen



- Ein Tensor in $U \otimes V$ kann an seinen beiden „Eingängen“ Vektoren aus U^* bzw. V^* entgegennehmen.
- Wird ein Eingang mit einem Vektor belegt, so wird er vom Tensor „konsumiert“. Der Faktor entsprechende Faktor in $U \otimes V$ wird dabei „verbraucht“.
- In Komponentendarstellung wird die entsprechende Achse mit dem Koordinatenvektor des anliegenden Vektors **kontrahiert**.