

Lineare Algebra II

Woche 02

20.04.2026 und 21.04.2026

§ 21.2 Die vier fundamentalen Unterräume zu einer linearen Abbildung

Satz 21.11

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K . Für $f \in \text{Homo}(V, W)$ und die duale Abbildung $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ gelten:

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(f)^0 \quad \text{in } V^*$$

$$\text{Kern}(f^*) = \text{Bild}(f)^0 \quad \text{in } W^*$$

$$\text{Bild}(f) = {}^0\text{Kern}(f^*) \quad \text{in } W$$

$$\text{Kern}(f) = {}^0\text{Bild}(f^*) \quad \text{in } V$$

Regeln für die Ausdrücke links und rechts von „ $=$ “:

die vier fundamentalen Unterräume zu einer Matrix

Folgerung 21.12 und Definition 21.13

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$.

$$\text{coBild}(A) := \text{Bild}(A^T) = \text{Kern}(A)^0 \quad \text{in } K^m$$

$$\text{coKern}(A) := \text{Kern}(A^T) = \text{Bild}(A)^0 \quad \text{in } K^n$$

$$\text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T) \quad \text{in } K^n$$

$$\text{Kern}(A) = {}^0\text{Bild}(A^T) \quad \text{in } K^m$$

Beispiel 21.14

- ① Gegeben sei der Unterraum von \mathbb{Q}^4

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Gesucht ist eine **implizite** Beschreibung von U als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Beispiel 21.14

- ② Gegeben sei der durch Gleichungen beschriebene Unterraum von \mathbb{Q}^5

$$U = \left\{ x \in \mathbb{Q}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Gesucht ist eine **explizite** Beschreibung mit Hilfe einer Basis.

§ 21.3 Zusammenspiel zwischen Dualräumen und Faktorräumen

Dualraum eines Faktorraumes


Lemma 21.15


Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $\pi: V \rightarrow V/U$ die kanonische Surjektion.


Das Bild der zu π dualen Abbildung $\pi^*: (V/U)^* \rightarrow V^*$ ist U^0 .
Deren Einschränkung


$$\pi^*|_{U^0}: \begin{cases} (V/U)^* \rightarrow U^0 \\ q^* \mapsto \pi^*(q^*) \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad (V/U)^* \cong U^0$$

Beispiel 21.16

V  ... Folgenraum

U  ... Unterraum

V/U  ...

 legen die Äquivalenzklasse (das Element von V/U) fest

 Repräsentanten einer Äquivalenzklasse unterscheiden sich hier

Wir betrachten als Beispiel $v^* \in V^*$ mit $\langle v^*, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := x_1 - x_3$.

Lemma 21.17

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $i: U \rightarrow V$ die kanonische Injektion.

Der Kern der zu i dualen Abbildung $i^*: V^* \rightarrow U^*$ ist U^0 .

Es gilt also nach dem Homomorphiesatz für Vektorräume:

$$I: \begin{cases} V^* / U^0 \rightarrow U^* \\ [v^*] \mapsto i^*(v^*) = v^*|_U \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad V^* / U^0 \cong U^*$$

Beispiel 21.18

$$\begin{array}{l}
 V \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \cdots \quad \text{Folgenraum} \\
 U \quad \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \cdots \quad \text{Unterraum}
 \end{array}$$

Wir betrachten als Beispiel $u^* \in U^*$ mit $\langle u^*, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := x_2 - x_4$.

§ 22 Der Bidualraum

der Bidualraum eines Vektorraumes

Definition 22.1

Es sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^* .

Der Dualraum von V^* heißt der **Bidualraum** von V .

Der Bidualraum V^{**} besteht also aus Linearformen auf V^* .

die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

Satz 22.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

① Die Abbildung

$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$$

ist ein injektiver^{AoC} Homomorphismus.

Sie heißt die **kanonische Injektion** oder **kanonische Einbettung** von V in V^{**} .

Beweis.

die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

Satz 22.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

- ② Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\dim(V) = \dim(V^{**})$.

Beweis.

Folgerung 22.3

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gilt

- 1 Für jede Teilmenge $F \subseteq V^*$ ist $F^0 = i_V({}^0F)$
- 2 Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ ist $(U^0)^0 = i_V(U)$

Wenn wir $(K^n)^*$ mit K^n identifizieren, dann gilt:

- 1 Für jede Teilmenge $F \subseteq K^n$ ist $F^0 = {}^0F$
- 2 Für jeden Unterraum $U \subseteq K^n$ ist $(U^0)^0 = U$

bidualer Homomorphismus

Es seien V, W Vektorräume über demselben Körper, $f \in \text{Homo}(V, W)$.

Definition 21.1

dualer Homomorphismus $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$

$$f^*: W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$$

(f^* verwandelt Linearformen auf W in Linearformen auf V)

Definition 22.4

bidualer Homomorphismus $f^{**} \in \text{Homo}(V^{**}, W^{**})$

$$f^{**}: V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} := v^{**} \circ f^* \in W^{**}$$

(f^{**} verwandelt Linearformen auf V^* in Linearformen auf W^*)

Zusammenhang zwischen f und f^{**}

Lemma 22.5

Es seien V, W Vektorräume über demselben Körper, $f \in \text{Homo}(V, W)$.

Dann gilt

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ i_V \downarrow & & \downarrow i_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Kapitel 6 Multilineare Abbildungen und Tensorprodukträume

§ 23 Bilineare Abbildungen und das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen

§ 23.1 Bilineare Abbildungen

Definition 23.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K .

- 1 Eine Abbildung

$$b: U \times V \rightarrow W$$

heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $u \in U$ und jedes feste $v \in V$ die Abbildungen

beide linear sind.

- 2 Die Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V; W)$.

Definition 23.1

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K .

- ③ Eine bilineare Abbildung in den Vektorraum K nennen wir eine **Bilinearform** auf $U \times V$.

- ④ Die Menge aller Bilinearformen $U \times V \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V)$ oder $\text{Bil}(U, V; K)$.

Beispiel 23.2

- ① Für jeden Körper ist die Abbildung

$$K \times K \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \beta \in K$$

eine Bilinearform auf $K \times K$.

- ② Für jede Matrix $A \in K^{n \times m}$ ist die Abbildung

$$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T A x \in K$$

eine Bilinearform auf $K^m \times K^n$.

- ③ Das Matrix-Matrix-Produkt

$$K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \ni (A, B) \mapsto AB \in K^{n \times \ell}$$

ist eine bilineare Abbildung.

Beispiel 23.2

- ④ Die duale Paarung eines Vektorraumes V und Dualraumes V^*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$$

ist eine Bilinearform auf $V^* \times V$.

- ⑤ Es seien U, V Vektorräume über demselben Körper K .
Für gegebene $u^* \in U^*$ und $v^* \in V^*$ ist die Abbildung

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle \in K$$

eine Bilinearform auf $U \times V$.

bilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Satz 23.3

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K .

Dann ist $\text{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{U \times V} = \{f: U \times V \rightarrow W\}$$

aller Abbildungen $U \times V \rightarrow W$.

Beweis. Übung

Satz 23.4

Es seien U , V , W Vektorräume über demselben Körper. Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V
- $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Vektoren in W

Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$b: U \times V \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft

$$b(u_i, v_j) = w_{ij} \quad \text{für alle } (i, j) \in I \times J$$

Bemerkung 23.5

- 1 Bilinearität $b: U \times V \rightarrow W$ nutzt
 - U und V (und W) als Vektorräume
 - $U \times V$ als Menge (kartesisches Produkt)
 - aber nicht $U \times V$ als Vektorraum (Produktraum)

- 2 ein weiterer Hinweis, dass $U \times V$ als Produktraum nicht das richtige Objekt für bilineare Abbildungen ist:
 - $\dim(U) \cdot \dim(V)$ Werte legen $b: U \times V \rightarrow W$ eindeutig fest
 - $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$

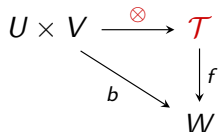
Motivation und Wunschliste für Tensorprodukte

Wir würden gerne bilineare Abbildungen

$$b: U \times V \rightarrow W$$

verstehen als lineare Abbildungen

$$f: \mathcal{T} \rightarrow W$$



Wunschliste (bei gegebenen Vektorräumen U und V)

- Vektorraum \mathcal{T} und eine bilineare Abbildung $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$
- zu jeder bilinearen Abbildung $b: U \times V \rightarrow W$ soll es eine lineare Abbildung $f: \mathcal{T} \rightarrow W$ geben mit $b = f \circ \otimes$
- die Zuordnung $b \mapsto f$ soll ein Vektorraum-Isomorphismus sein

$$\text{Bil}(U, V; W) \cong \text{Homo}(\mathcal{T}, W)$$

Wir benötigen keine eigene Theorie für bilineare Abbildungen!

§ 23.2 Das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen

Tensorprodukt, universelle bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{T} \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Definition 23.6

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K . Weiter seien \mathcal{T} ein weiterer K -Vektorraum und $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$ bilinear.

- Das Paar (\mathcal{T}, \otimes) heißt ein **Tensorprodukt** von U und V , wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für **jede** bilineare Abbildung $b: U \times V \rightarrow W$ in **irgendeinem** K -Vektorraum W gibt es eine **eindeutig bestimmte** lineare Abbildung $f \in \text{Homo}(\mathcal{T}, W)$ mit der Eigenschaft $b = f \circ \otimes$, also

$$b(u, v) = f(u \otimes v) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V$$

Tensorprodukt, universelle bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{T} \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Definition 23.6

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K . Weiter sei (\mathcal{T}, \otimes) ein Tensorprodukt von U und V .

- 2 Dabei heißt \mathcal{T} der **Tensorproduktraum**. Die Elemente von \mathcal{T} heißen **Tensoren**. Der Nullvektor in \mathcal{T} heißt der **Nulltensor**.
- 3 $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$ heißt die **universelle bilineare Abbildung** des Tensorprodukts (\mathcal{T}, \otimes) .

Tensoren der Form $u \otimes v$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**. $u \otimes v$ heißt auch das **Tensorprodukt** der Vektoren u und v .

Bemerkung 23.7

- ① Das Tensorproduktsymbol \otimes bekommt als „multiplikatives“ Symbol Vorrang vor der Addition. Die Bedingungen der Bilinearität von \otimes lauten ausgeschrieben:

$$u_1 \otimes v + u_2 \otimes v = (u_1 + u_2) \otimes v$$

$$u \otimes v_1 + u \otimes v_2 = u \otimes (v_1 + v_2)$$

$$(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v)$$

$$u \otimes (\beta v) = \beta (u \otimes v)$$

für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$ sowie $\alpha, \beta \in K$.

- ② Insbesondere gilt $(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$.

Bemerkung 23.7

- ③ Wie für alle bilinearen Abbildungen gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j u_i \otimes v_j$$

- ④ Das Tensorprodukt $u \otimes v$ ist i. A. nicht kommutativ, selbst wenn $U = V$ gilt.
- ⑤ Der Tensorproduktraum \mathcal{T} eines Tensorprodukts (\mathcal{T}, \otimes) der Vektorräume U und V wird in der Regel mit dem Symbol $U \otimes V$ bezeichnet.

universelle Eigenschaft des Tensorprodukts ($U \otimes V, \otimes$)

Satz 23.8

Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & U \otimes V \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

- 1 Zu jeder bilinearen Abbildung $b: U \times V \rightarrow W$ existiert genau eine lineare Abbildung $f: U \otimes V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $b = f \circ \otimes$, also $b(u, v) = f(u \otimes v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.
- 2 Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung $f: U \otimes V \rightarrow W$ durch $f \circ \otimes: U \times V \ni (u, v) \mapsto f(u \otimes v) \in W$ eine bilineare Abbildung definiert.

3

$$\text{Bil}(U, V; W) \ni b \mapsto f \in \text{Homo}(U \otimes V, W)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

Angabe linearer Abbildungen auf Tensorprodukträumen

Wie definieren wir eine lineare Abbildung $f: U \otimes V \rightarrow W$?

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & U \otimes V \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Lineare Abbildungen $f: U \otimes V \rightarrow W$ werden eindeutig durch ihre Bilder auf den Elementartensoren $u \otimes v$ festgelegt, sofern die zugehörige Abbildungsvorschrift bilinear ist.

„Es sei $f: U \otimes V \rightarrow W$ diejenige lineare Abbildung, deren Bilder auf Elementartensoren $u \otimes v$ durch die (bilineare) Abbildungsvorschrift ... festgelegt sind.“

Beispiel 23.10

- ① Es sei $A \in K^{n \times m}$ und $b: K^m \times K^n \rightarrow K$ mit $b(x, y) = y^T A x$.

Die zugehörige Linearform $f: K^m \otimes K^n \rightarrow K$ ist durch die Bilder $f(x \otimes y) = y^T A x$ auf den Elementartensoren $x \otimes y$ für $x \in K^m$ und $y \in K^n$ eindeutig festgelegt.

- ② Es sei $b: K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}$ mit $b(A, B) = A B$.

Die zugehörige lineare Abbildung $f: K^{n \times m} \otimes K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}$ ist durch die Bilder $f(A \otimes B) = A B$ auf den Elementartensoren $A \otimes B$ für $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times \ell}$ eindeutig festgelegt.

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Satz 23.11

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K .

- ① Sind $(U \otimes V, \otimes)$ und $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte von U und V , dann gibt es einen Isomorphismus $I \in \text{Iso}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$ mit $\tilde{\otimes} = I \circ \otimes$, d. h., folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & U \times V & \\ \otimes \swarrow & & \searrow \tilde{\otimes} \\ U \otimes V & \xrightarrow{I} & U \tilde{\otimes} V \end{array}$$

Beweis.

Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Satz 23.11

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K .

- ② Ist $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V und ist $I \in \text{Iso}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$ ein Isomorphismus mit einem weiteren K -Vektorraum $U \tilde{\otimes} V$, dann ist auch $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ ein Tensorprodukt von U und V mit $\tilde{\otimes} := I \circ \otimes: U \times V \rightarrow U \tilde{\otimes} V$.

Beweis. Übung