

# Lineare Algebra II

## Woche 02

20.04.2026 und 21.04.2026

# § 21.2 Die vier fundamentalen Unterräume zu einer linearen Abbildung

# die vier fundamentalen Unterräume zu einer Abbildung AoC

## Satz 21.11

Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Für  $f \in \text{Homo}(V, W)$  und die duale Abbildung  $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$  gelten:

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(f)^{\circ} \quad \text{in } V^*$$

$$\text{Kern}(f^*) = \text{Bild}(f)^{\circ} \quad \text{in } W^*$$

$$\text{Bild}(f) = {}^{\circ}\text{Kern}(f^*) \quad \text{in } W$$

$$\text{Kern}(f) = {}^{\circ}\text{Bild}(f^*) \quad \text{in } V$$

Regeln für die Ausdrücke links und rechts von „ $\circ$ “:

$$\begin{aligned} \text{Bild} &\leftrightarrow \text{Kern} \\ f &\leftrightarrow f^* \\ \circ \text{ bzw. } {}^{\circ} &\leftrightarrow \text{nichts} \end{aligned}$$

# die vier fundamentalen Unterräume zu einer Matrix

eigentlich: zu  $f_A: K^m \rightarrow K^n$  und  $(f_A)^* = f_{A^T}: K^n \rightarrow K^m$

Folgerung 21.12 und Definition 21.13

Id.  $(K^n)^*$  mit  $K^n$

Es sei  $K$  ein Körper und  $A \in K^{n \times m}$ .

Dimensionen

$$\text{coBild}(A) := \text{Bild}(A^T) = \text{Kern}(A)^0 \quad \text{in } K^m \quad r = m - (m-r)$$

$$\text{coKern}(A) := \text{Kern}(A^T) = \text{Bild}(A)^0 \quad \text{in } K^n \quad n-r = n-r$$

$$\rightarrow \text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T) \quad \text{in } K^n \quad r = n - (n-r)$$

$$\text{Kern}(A) = {}^0\text{Bild}(A^T) \quad \text{in } K^m \quad m-r = m-r$$

$$r = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$$

$$\dim(\text{Kern}(A)) = m-r$$

$$\dim(\text{Kern}(A^T)) = n-r$$

$$\dim(U^0) = \text{codim}(U)$$

$$\dim({}^0F) = \text{codim}(F)$$

# Beschreibung von Unterräumen: explizit $\rightsquigarrow$ implizit

Beispiel 21.14

Idee:  $U = \text{Bild}(A) = \text{Kern}(A^T)$  als LGS schreiben mit Basisvektoren von  $\text{Kern}(A^T)$

1 Gegeben sei der Unterraum von  $\mathbb{Q}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Bild} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \right)$$

Gesucht ist eine **implizite** Beschreibung von  $U$  als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

$$\text{Kern}(A^T) = \text{Kern} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Kern} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$\uparrow$  red. ZSF

besitzt die Basis  $\left( \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$U = \left\{ y \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{bmatrix} 14 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

# Beschreibung von Unterräumen: implizit $\rightsquigarrow$ explizit

Beispiel 21.14 Idee!  $U = \text{Bild}(A)^\circ = \text{Kern}(A^T)$

② Gegeben sei der durch Gleichungen beschriebene Unterraum von  $\mathbb{Q}^5$

$$U = \left\{ x \in \mathbb{Q}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\} = \text{Bild} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \right)^\circ$$

Gesucht ist eine **explizite** Beschreibung mit Hilfe einer Basis.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{1} & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

besitzt die Basis  $\left( \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

# § 21.3 Zusammenspiel zwischen Dualräumen und Faktorräumen

# Dualraum eines Faktorraumes

**Lemma 21.15**  $\pi(v) = [v] = v + U$

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Weiter sei  $\pi: V \rightarrow V/U$  die kanonische Surjektion.

Das Bild der zu  $\pi$  dualen Abbildung  $\pi^*: (V/U)^* \rightarrow V^*$  ist  $U^0$ .  
Deren Einschränkung

$$\pi^*|_{U^0}: \begin{cases} (V/U)^* \rightarrow U^0 \\ q^* \mapsto \pi^*(q^*) \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad \underbrace{(V/U)^*}_{\text{LF, die auf dem}} \cong \underbrace{U^0}_{\text{LF, die auf } U}$$

raum def. sind  
verchw.

$v^* \in V^*$  liefert für alle Elemente  
des Nebenraumes  $v + U$   
denselben Wert

$$\Leftrightarrow v^* \in U^0$$

$$(V/U)^* \cong U^0$$

$f^*$ 
 $\begin{array}{c} \xrightarrow{\pi^*} \\ \xrightarrow{\pi^{-*}} \end{array} v^*$

## Beispiel 21.16

$V$ 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ... Folgenraum

$U$ 

0	0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

 ... Unterraum

$V/U$ 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ...

■ legen die Äquivalenzklasse (das Element von  $V/U$ ) fest

■ Repräsentanten einer Äquivalenzklasse unterscheiden sich hier

Wir betrachten als Beispiel  $v^* \in V^*$  mit  $\langle v^*, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := x_1 - x_3$ .

Es gilt  $\langle v^*, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$ , d.h.  $v^* \in U^0$ .

Zu  $v^* \in U^0$  gehört  $f^* = \pi^{-*}(v^*) \in (V/U)^*$  mit

$$\langle f^*, [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \rangle = \langle v^*, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = x_1 - x_3.$$

## Lemma 21.17

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Weiter sei  $i: U \rightarrow V$  die kanonische Injektion.  $i(u) = u$

Der Kern der zu  $i$  dualen Abbildung  $i^*: V^* \rightarrow U^*$  ist  $U^0$ .

Es gilt also nach dem Homomorphiesatz für Vektorräume:

$$I: \begin{cases} V^* / U^0 \rightarrow U^* \\ [v^*] \mapsto i^*(v^*) = v^*|_U \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus  $V^* / U^0 \cong U^*$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Nebenklassen von } U^0 \text{ in } V^*}$ 
 $\xrightarrow{\text{LF}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{auf } U}$



# § 22 Der Bidualraum

# der Bidualraum eines Vektorraumes

## Definition 22.1

Es sei  $V$  ein Vektorraum mit Dualraum  $V^*$ .

Der Dualraum von  $V^*$  heißt der **Bidualraum** von  $V$ .

Der Bidualraum  $V^{**}$  besteht also aus Linearformen auf  $V^*$ .

Für jedes  $v \in V$  gehört

$$V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$$

$$\text{zu } \text{Hom}(V^*, K) = V^{**} \quad !$$

$$\text{kurz: } \langle \cdot, v \rangle$$

# die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

## Satz 22.2

Es sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  mit Dualraum  $V^*$ .

1 Die Abbildung

$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$$

ist ein injektiver  $\text{AoC}$  Homomorphismus.

Sie heißt die **kanonische Injektion** oder **kanonische Einbettung** von  $V$  in  $V^{**}$ .

**Beweis.**

- **Additivität:**  $[i_V(v_1 + v_2)](v^*) = \langle v^*, v_1 + v_2 \rangle$   
 $= \langle v^*, v_1 \rangle + \langle v^*, v_2 \rangle = [i_V(v_1)](v^*) + [i_V(v_2)](v^*)$   
 $= [i_V(v_1) + i_V(v_2)](v^*)$ . Homogenität analog.
- **Injektivität:**  $v \in \text{Kern}(i_V)$ , d.h.  $[i_V(v)](v^*) = \langle v^*, v \rangle = 0$  für alle  $v^* \in V^*$ . Das heißt  $v \in \text{Kern}(i_V) = \{0_V\}$   
 $\Rightarrow v = 0$ .  
Lemma 20.21 (AoC)

## die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

### Satz 22.2

Es sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  mit Dualraum  $V^*$ .

- ② Ist  $V$  endlich-dimensional, dann ist  $i_V$  auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt  $\dim(V) = \dim(V^{**})$ .

Beweis.  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \dim(V^*) = n \quad \text{Folg. 20.9}$$

$$\Rightarrow \dim(V^{**}) = n \quad \text{— r —}$$

$i_V: V \rightarrow V^{**}$  ist injektiv, also auch surjektiv.  
(Folg. 18.9).

# Eigenschaften von Annihilatoren im Dualraum

## Folgerung 22.3

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gilt

- 1 Für jede Teilmenge  $F \subseteq V^*$  ist  $F^0 = i_V({}^0F)$
- 2 Für jeden Unterraum  $U \subseteq V$  ist  $(U^0)^0 = i_V(U)$

Wenn wir  $(K^n)^*$  mit  $K^n$  identifizieren, dann gilt:

- 1 Für jede Teilmenge  $F \subseteq K^n$  ist  $F^0 = {}^0F$
- 2 Für jeden Unterraum  $U \subseteq K^n$  ist  $(U^0)^0 = U$

# bidualer Homomorphismus

Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper,  $f \in \text{Homo}(V, W)$ .

## Definition 21.1

dualer Homomorphismus  $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$

$$f^*: W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$$

( $f^*$  verwandelt Linearformen auf  $W$  in Linearformen auf  $V$ )

## Definition 22.4

bidualer Homomorphismus  $f^{**} \in \text{Homo}(V^{**}, W^{**})$

$$f^{**}: V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} := v^{**} \circ f^* \in W^{**}$$

( $f^{**}$  verwandelt Linearformen auf  $V^*$  in Linearformen auf  $W^*$ )

# Zusammenhang zwischen $f$ und $f^{**}$

## Lemma 22.5

Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper,  $f \in \text{Homo}(V, W)$ .

Dann gilt

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ i_V \downarrow & & \downarrow i_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

# Kapitel 6 Multilineare Abbildungen und Tensorprodukträume

# § 23 Bilineare Abbildungen und das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen

# § 23.1 Bilineare Abbildungen

## Definition 23.1

Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ .

- ① Eine Abbildung  $b: U \times V \rightarrow W$  <sup>karf. Produkt</sup>

heißt **bilinear**, wenn für jedes feste  $u \in U$  und jedes feste  $v \in V$  die Abbildungen (partielles Einsetzen)

$$b(\cdot, v) : U \ni u \mapsto b(u, v) \in W$$

$$b(u, \cdot) : V \ni v \mapsto b(u, v) \in W$$

<sup>fest</sup>  
beide linear sind.

- ② Die Menge aller bilinearen Abbildungen  $U \times V \rightarrow W$  bezeichnen wir mit  $\text{Bil}(U, V; W)$ .

## Definition 23.1

$$\omega = K$$

Es seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über dem Körper  $K$ .

- ③ Eine bilineare Abbildung in den Vektorraum  $K$  nennen wir eine **Bilinearform** auf  $U \times V$ .  
*↳ Werte in  $K$*
- ④ Die Menge aller Bilinearformen  $U \times V \rightarrow K$  bezeichnen wir mit  $\text{Bil}(U, V)$  oder  $\text{Bil}(U, V; K)$ .

## Beispiel 23.2

- ① Für jeden Körper ist die Abbildung

$$K \times K \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \beta \in K$$

eine Bilinearform auf  $K \times K$ .

- ② Für jede Matrix  $A \in K^{n \times m}$  ist die Abbildung

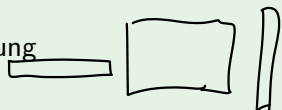
$$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T A x \in K$$

eine Bilinearform auf  $K^m \times K^n$ .

- ③ Das Matrix-Matrix-Produkt

$$K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \ni (A, B) \mapsto AB \in K^{n \times \ell}$$

ist eine bilineare Abbildung.



## Beispiel 23.2

- ④ Die duale Paarung eines Vektorraumes  $V$  und Dualraumes  $V^*$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$$

ist eine Bilinearform auf  $V^* \times V$ .

- ⑤ Es seien  $U, V$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ .  
Für gegebene  $u^* \in U^*$  und  $v^* \in V^*$  ist die Abbildung

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto \langle u^*, u \rangle \langle v^*, v \rangle \in K$$

eine Bilinearform auf  $U \times V$ .

# bilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

## Satz 23.3

Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ .

Dann ist  $\text{Bil}(U, V; W)$  ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{U \times V} = \{f: U \times V \rightarrow W\} \quad \text{Typ } W^X$$

aller Abbildungen  $U \times V \rightarrow W$ .

Beweis. Übung

# Existenz und Eindeutigkeit bilinearer Abbildungen

vgl.: lineare Abbildungen werden durch die Bilder einer Basis bestimmt

## Satz 23.4

Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über demselben Körper. Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $U$
- $(v_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $V$
- $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  eine Familie von Vektoren in  $W$

Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$b: U \times V \rightarrow W \quad b(u, v) = b\left(\sum_{i \in I} \alpha_i u_i, \sum_{j \in J} \beta_j v_j\right)$$
$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_j \underbrace{b(u_i, v_j)}_{= w_{ij}}$$

mit der Eigenschaft

$$b(u_i, v_j) = w_{ij} \quad \text{für alle } (i, j) \in I \times J$$

Paare von Basisvektoren  
(kart. Produkt von Basen)

## Bemerkung 23.5

① Bilinearität  $b: U \times V \rightarrow W$  nutzt

- $U$  und  $V$  (und  $W$ ) als Vektorräume für partielle Linearität
- $U \times V$  als Menge (kartesisches Produkt) als Def.-menge von  $b$
- aber nicht  $U \times V$  als Vektorraum (Produktraum)

$$b(\alpha(u,v)) = b(\alpha u, \alpha v) = \alpha b(u, \alpha v) = \alpha^2 b(u, v)$$

Bilinearität  $\neq$  Linearität des Produktraum

② ein weiterer Hinweis, dass  $U \times V$  als Produktraum nicht das richtige Objekt für bilineare Abbildungen ist:

- $\dim(U) \cdot \dim(V)$  Werte legen  $b: U \times V \rightarrow W$  eindeutig fest
- $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$   
↳ Lemma 12.18  
Produktraum

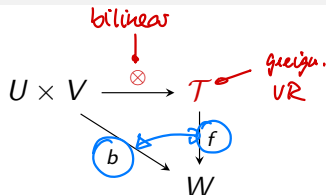
# Motivation und Wunschliste für Tensorprodukte

Wir würden gerne bilineare Abbildungen

$$b: U \times V \rightarrow W$$

verstehen als lineare Abbildungen

$$f: \mathcal{T} \rightarrow W$$



## Wunschliste (bei gegebenen Vektorräumen $U$ und $V$ )

- Vektorraum  $\mathcal{T}$  und eine bilineare Abbildung  $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$
- zu jeder bilinearen Abbildung  $b: U \times V \rightarrow W$  soll es eine lineare Abbildung  $f: \mathcal{T} \rightarrow W$  geben mit  $b = f \circ \otimes$   
↪ Bilinearität      ↑ eindeutige
- die Zuordnung  $b \mapsto f$  soll ein Vektorraum-Isomorphismus sein

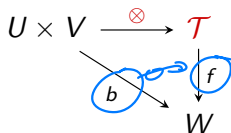
$$\text{Bil}(U, V; W) \cong \text{Homo}(\mathcal{T}, W)$$

Wir benötigen keine eigene Theorie für bilineare Abbildungen!

# § 23.2 Das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen

# Tensorprodukt, universelle bilineare Abbildung

Schreibe  $u \otimes v$  statt  $\otimes(u, v)$



zunächst keine explizite Konstruktion

Eindeutigkeit

## Definition 23.6

Es seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ . Weiter seien  $\mathcal{T}$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und  $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$  bilinear.

- Das Paar  $(\mathcal{T}, \otimes)$  heißt ein Tensorprodukt von  $U$  und  $V$ , wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für jede bilineare Abbildung  $b: U \times V \rightarrow W$  in irgendeinem  $K$ -Vektorraum  $W$  gibt es eine **eindeutig bestimmte** lineare Abbildung  $f \in \text{Homo}(\mathcal{T}, W)$  mit der Eigenschaft  $b = f \circ \otimes$ , also

$$b(u, v) = f(u \otimes v) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V$$

# Tensorprodukt, universelle bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{T} \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

## Definition 23.6

Es seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ . Weiter sei  $(\mathcal{T}, \otimes)$  ein Tensorprodukt von  $U$  und  $V$ .

- 2 Dabei heißt  $\mathcal{T}$  der **Tensorproduktraum**. Die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen **Tensoren**. Der Nullvektor in  $\mathcal{T}$  heißt der **Nulltensor**.
- 3  $\otimes: U \times V \rightarrow \mathcal{T}$  heißt die **universelle bilineare Abbildung** des Tensorprodukts  $(\mathcal{T}, \otimes)$ . *(im Bild von  $\otimes$ )*

Tensoren der Form  $u \otimes v$  heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**.  $u \otimes v$  heißt auch das **Tensorprodukt** der Vektoren  $u$  und  $v$ . „ $u$  Tensor  $v$ “

## Bemerkung 23.7

- ① Das Tensorproduktsymbol  $\otimes$  bekommt als „multiplikatives“ Symbol Vorrang vor der Addition. Die Bedingungen der Bilinearität von  $\otimes$  lauten ausgeschrieben:

$$\begin{array}{l} u_1 \otimes v + u_2 \otimes v = (u_1 + u_2) \otimes v \\ u \otimes v_1 + u \otimes v_2 = u \otimes (v_1 + v_2) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_1 \otimes v + u_2 \otimes v = (u_1 + u_2) \otimes v \\ u \otimes v_1 + u \otimes v_2 = u \otimes (v_1 + v_2) \end{array}} \right\} \text{Additivität}$$
$$\begin{array}{l} (\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) \\ u \otimes (\beta v) = \beta (u \otimes v) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) \\ u \otimes (\beta v) = \beta (u \otimes v) \end{array}} \right\} \text{Homogenität}$$

für alle  $u, u_1, u_2 \in U$  und  $v, v_1, v_2 \in V$  sowie  $\alpha, \beta \in K$ .

- ② Insbesondere gilt  $(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$ .

## Bemerkung 23.7

- ③ Wie für alle bilinearen Abbildungen gilt

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^m \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j u_i \otimes v_j$$

- ④ Das Tensorprodukt  $u \otimes v$  ist i. A. nicht kommutativ, selbst wenn  $U = V$  gilt.
- ⑤ Der Tensorproduktraum  $\mathcal{T}$  eines Tensorprodukts  $(\mathcal{T}, \otimes)$  der Vektorräume  $U$  und  $V$  wird in der Regel mit dem Symbol  $U \otimes V$  bezeichnet.

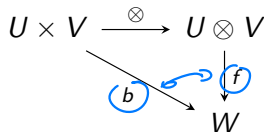
$$(U \otimes V, \otimes)$$

$\mathcal{T} = \uparrow$   
zweite Verwendung

# universelle Eigenschaft des Tensorprodukts ( $U \otimes V, \otimes$ )

## Satz 23.8

Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $K$  und  $(U \otimes V, \otimes)$  ein Tensorprodukt von  $U$  und  $V$ . Dann gilt:



Df.  
23.8

- 1 Zu jeder bilinearen Abbildung  $b: U \times V \rightarrow W$  existiert genau eine lineare Abbildung  $f: U \otimes V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft  $b = f \circ \otimes$ , also  $b(u, v) = f(u \otimes v)$  für alle  $u \in U$  und  $v \in V$ .
- 2 Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung  $f: U \otimes V \rightarrow W$  durch  $f \circ \otimes: U \times V \ni (u, v) \mapsto f(u \otimes v) \in W$  eine bilineare Abbildung definiert.

3

$$\text{Bil}(U, V; W) \ni b \mapsto f \in \text{Homo}(U \otimes V, W)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

# Angabe linearer Abbildungen auf Tensorprodukträumen

Wie definieren wir eine lineare Abbildung  $f: U \otimes V \rightarrow W$ ?

Satz 23.8: Es gibt genau

eine lin. Abb.  $f: U \otimes V \rightarrow W$

festgelegt durch  $f(u \otimes v) = \underbrace{b(u, v)}$

*bilinear!*

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & U \otimes V \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

Lineare Abbildungen  $f: U \otimes V \rightarrow W$  werden eindeutig durch ihre Bilder auf den Elementartensoren  $u \otimes v$  festgelegt, sofern die zugehörige Abbildungsvorschrift bilinear ist.

„Es sei  $f: U \otimes V \rightarrow W$  diejenige lineare Abbildung, deren Bilder auf Elementartensoren  $u \otimes v$  durch die (bilineare) Abbildungsvorschrift ... festgelegt sind.“

## Beispiel 23.10

- ① Es sei  $A \in K^{n \times m}$  und  $b: K^m \times K^n \rightarrow K$  mit  $b(x, y) = y^T A x$ .

Die zugehörige Linearform  $f: K^m \otimes K^n \rightarrow K$  ist durch die Bilder  $f(x \otimes y) = y^T A x$  auf den Elementartensoren  $x \otimes y$  für  $x \in K^m$  und  $y \in K^n$  eindeutig festgelegt.

nicht:  $y^T A x$

- ② Es sei  $b: K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}$  mit  $b(A, B) = AB$ .

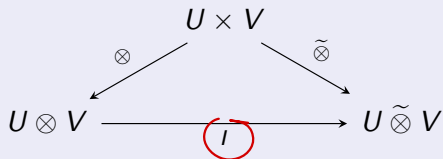
Die zugehörige lineare Abbildung  $f: K^{n \times m} \otimes K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}$  ist durch die Bilder  $f(A \otimes B) = AB$  auf den Elementartensoren  $A \otimes B$  für  $A \in K^{n \times m}$  und  $B \in K^{m \times \ell}$  eindeutig festgelegt.

# Eindeutigkeit des Tensorprodukts

## Satz 23.11

Es seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ .

- ① Sind  $(U \otimes V, \otimes)$  und  $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$  zwei Tensorprodukte von  $U$  und  $V$ , dann gibt es einen Isomorphismus  $I \in \text{Iso}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$  mit  $\tilde{\otimes} = I \circ \otimes$ , d. h., folgendes Diagramm kommutiert:



Beweis.  $\tilde{\otimes}: U \times V \rightarrow U \tilde{\otimes} V$  ist bilinear. Es ex. also  $f_1 \in \text{Homo}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$  mit  $\tilde{\otimes} = f_1 \circ \otimes$ . Analog:

Es ex.  $f_2 \in \text{Homo}(U \tilde{\otimes} V, U \otimes V)$  mit  $\otimes = f_2 \circ \tilde{\otimes}$ .  
 $\Rightarrow \tilde{\otimes} = f_1 \circ f_2 \circ \tilde{\otimes}$ , aber auch  $\tilde{\otimes} = \text{id} \circ \tilde{\otimes}$

Eindeutigkeit:  $f_1 \circ f_2 = \text{id}$ , tauschen:  $f_1 = f_2^{-1} = I$

# Eindeutigkeit des Tensorprodukts

## Satz 23.11

Es seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ .

- ② Ist  $(U \otimes V, \otimes)$  ein **Tensorprodukt** von  $U$  und  $V$  und ist  $I \in \text{Iso}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$  ein Isomorphismus mit einem weiteren  $K$ -**Vektorraum**  $U \tilde{\otimes} V$ , dann ist auch  $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$  ein Tensorprodukt von  $U$  und  $V$  mit  $\tilde{\otimes} := I \circ \otimes: U \times V \rightarrow U \tilde{\otimes} V$ .

Beweis. Übung