

Lineare Algebra II

Woche 01

13.04.2026, 14.04.2026 und 16.04.2026

§ 20 Dualräume

§ 20.1 Der Dualraum eines Vektorraumes

Erinnerung: Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K , dann bezeichnet

$$\text{Homo}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ist linear}\}$$

den Vektorraum der linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$.

Linearität von f heißt

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

Vektorraumstruktur von $\text{Homo}(V, W)$

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

$$(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$$

Es gilt $\dim(\text{Homo}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Definition 20.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Der Vektorraum

$$V^* := \text{Homo}(V, K) = \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \rightarrow K$ heißt der **(alg.) Dualraum** von V .

Die Elemente von V^* heißen **lineare Funktionale** auf V oder **Linearformen** auf V oder **Covektoren**.

Beispiel 20.2

- 1 Projektion auf die i -te Koordinate ist eine Linearform auf K^n
- 2 Auswertungsabbildung ist eine Linearform auf K^X

Beispiel 20.2

- 3 Für $A \in K^{1 \times n}$ ist $f_A: K^n \rightarrow K$ eine Linearform auf K^n .

- 4 Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , dann hat $v^* \in V^*$ die Darstellungsmatrix

Beispiel 20.2

- 5 Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist die Ableitung $f'(v): V \rightarrow \mathbb{R}$ an jeder Stelle $v \in V$ eine Linearform auf V .

Bemerkung 20.3

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so sagen wir zu $v^*(v)$:

- Wir **setzen** den Vektor v in die Linearform v^* **ein**.
- Wir **wenden** die Linearform v^* auf den Vektor v **an**.

Bemerkung 20.4

- Linearformen sind „Messgeräte“, mit denen Vektoren „gemessen“ werden. Das Ergebnis ist eine „Zahl“, also ein Element in K .
- Vektoren, Covektoren und Skalare tragen oft physikalische Einheiten. Es gilt $[V^*] \cdot [V] = [K]$.

Vektoren und Covektoren

primärer Vektorraum V

Vektoren sind Elemente von V

dualer Vektorraum V^*

Covektoren sind Elemente von V^*

Covektoren sind lineare
Abbildungen in $\text{Homo}(V, K)$

duale Paarung

Definition 20.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle := v^*(v) \in K$$

heißt die **(kanonische) duale Paarung** von V^* und V .

die duale Paarung ist linear in beiden Argumenten

Lemma 20.7

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear in beiden Argumenten, also

$$\begin{aligned}\langle \alpha v_1^* + \beta v_2^*, v \rangle &= \alpha \langle v_1^*, v \rangle + \beta \langle v_2^*, v \rangle \\ \langle v^*, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= \alpha \langle v^*, v_1 \rangle + \beta \langle v^*, v_2 \rangle\end{aligned}$$

Beweis.

Konstruktion von Linearformen

Erinnerung: Lineare Abbildungen sind durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

Satz 20.8

vgl. Satz 19.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .
Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

Die Zuordnung

$$I_B: V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v_i \rangle_{i \in I} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Dimension des Dualraumes

Folgerung 20.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $V \cong V^*$, also $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Beweis.

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von V , dann bilden die Linearformen $v_i^* \in V^*$, $i = 1, \dots, n$, definiert durch

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

die zu B **duale Basis** von V^* .

Beweis. lineare Unabhängigkeit:

duale Basis: „Koordinatenermittler“

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^* , dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i^*, v \rangle v_i \quad \text{und} \quad v^* = \sum_{i=1}^n \langle v^*, v_i \rangle v_i^*$$

Beweis.

Beispiel 20.13

- 1 Es sei $V = K^n$ und $B = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis.

Beispiel 20.13

- ② Es sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedenen Elementen. Die charakteristischen Funktionen $B := (e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ bilden eine Basis von K^X .

Die zugehörige duale Basis ist $B^* := (E_{x_1}, \dots, E_{x_n})$, wobei E_{x_i} eine Funktion $X \rightarrow K$ an der Stelle $x_i \in X$ auswertet.

Beispiel 20.13

③ Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von der Basis

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

aufgespannt wird.

Die duale Basis B^* kann in Form von
Punktauswertungsfunctionalen dargestellt werden:

$$(p \mapsto p(0), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

duale Paarung: Auswertung mittels Koeffizientenvektoren

Lemma 20.14

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Sind

$$v^* = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^* \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

die Darstellungen von $v^* \in V^*$ bzw. $v \in V$ bzgl. dieser Basen, dann gilt

$$\langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j = \xi^T x$$

Beweis.

Identifikation von $(K^n)^*$ mit K^n

Bemerkung 20.16

- Wir werden in K^n wann immer möglich die Standardbasis $B_n = (e_1, \dots, e_n)$ verwenden.
- Vektoren $v \in K^n$ stimmen dann mit ihren Koordinatenvektoren $x = \Phi_{B_n}^{-1}(v)$ überein.
- Im Dualraum $(K^n)^*$ verwenden wir dann die duale Basis $B_n^* = (\pi_1, \dots, \pi_n)$.
- Linearformen $v^* \in (K^n)^*$ werden über ihre Koordinatenvektoren $\xi = \Phi_{B_n^*}^{-1}(v^*) \in K^n$ dargestellt.
- Wir gehen einen Schritt weiter und identifizieren $\xi \in K^n$ mit $v^* \in (K^n)^*$ über den Isomorphismus $\Phi_{B_n^*}^{-1}$.

Bemerkung 20.17

- ① Ist $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V mit unendlicher Indexmenge I , dann ist zu B die gleichmächtige Familie $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

zwar linear unabhängig in V^* , aber kein Erzeugendensystem:

Bemerkung 20.17

- ② Jeder Vektorraum besitzt einen Dualraum, jedoch ist nicht jeder Vektorraum selbst ein Dualraum.

Beispielweise kann ein Dualraum keine abzählbar unendliche Basis besitzen.

Damit ist der Vektorraum $(K^{\mathbb{N}})_{00}$ der endlich getragenen Folgen über einem Körper K kein Dualraum.

§ 20.2 Transformationsmatrizen des Basiswechsels

Lemma 20.18

vgl. Lemma 19.16

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* und

- $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ Basen von V
- $B_{V^*} = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ und $\widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}_1^*, \dots, \widehat{v}_n^*)$ die dualen Basen dazu

Mit $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}(\text{id}_V)$

ist $T^{-T} = \mathcal{T}_{B_{V^*} \leftarrow \widehat{B}_{V^*}} = \mathcal{M}_{B_{V^*} \leftarrow \widehat{B}_{V^*}}(\text{id}_{V^*})$.

Für Koordinatenvektoren gilt

$$x = T \widehat{x}$$

$$\xi = T^{-T} \widehat{\xi}$$

Lemma 20.18

$$T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \quad \Rightarrow \quad T^{-T} = \mathcal{T}_{B_{V^*} \leftarrow \widehat{B}_{V^*}}$$

Beweis.

Bemerkung 20.19

Transformationen von **neu** nach **alt**:

$$\text{Basis } \hat{v}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} v_i$$

$$\text{Koordinaten eines Vektors } \hat{x}_j = \sum_{i=1}^n (T^{-T})_{ij} x_i$$

$$\text{Koordinaten eines Covektors } \hat{\xi}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} \xi_i$$

§ 20.3 Annihilatoren und Prä-Annihilatoren

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

① Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^0 := \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

$$= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \text{Kern}(v^*)\}$$

$$= \bigcap_{v \in M} \{v\}^0 \subseteq V^*$$

der **Annihilator** von M .

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

② Für $F \subseteq V^*$ heißt

$${}^0F := \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\}$$

$$= \bigcap_{v^* \in F} \text{Kern}(v^*) \subseteq V$$

der **Prä-Annihilator** von F .

Lemma 20.21

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

$$\textcircled{1} \quad \{0_V\}^0 = V^*$$

$$\textcircled{2} \quad V^0 = \{0_{V^*}\}$$

$$\textcircled{3} \quad {}^0\{0_{V^*}\} = V$$

$$\textcircled{4} \quad {}^0(V^*) = \{0_V\}$$

Lemma 20.22

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

- 1 Ist $M \subseteq V$, dann ist M^0 ein Unterraum von V^* .
Weiter gilt $M^0 = \langle M \rangle^0$.
- 2 Ist $F \subseteq V^*$, dann ist 0F ein Unterraum von V .
Weiter gilt ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$.

Satz 20.23

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

- ① Ist (v_1, \dots, v_k) eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von U^0 , also gilt

$$\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U)$$

- ② Ist (v_1^*, \dots, v_k^*) eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist (v_{k+1}, \dots, v_n) eine Basis von 0F , also gilt

$$\dim({}^0F) = \dim(V^*) - \dim(F) = \dim(V) - \dim(F)$$

alle Unterräume sind Prä-Annihilatoren^{AoC}

Lemma 20.25

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt

$$U = \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*) = {}^0(U^0)$$

Lemma 20.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

- 1 Es seien $U \subseteq V$ ein Unterraum und $X := \Phi_B^{-1}(U) \subseteq K^n$ der Unterraum der zugehörigen Koordinatenvektoren.

Dann gilt für den Annihilator U^0

$$U^0 = \Phi_{B^*}(X^0) \quad \text{mit} \quad X^0 = \{\xi \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } x \in X\}.$$

Bestimmung von Annihilatoren mit Koordinatenvektoren

Beispiel 20.27

Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von B aufgespannt wird:

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

$$B^* = (p \mapsto p(0), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

Wir suchen den Annihilator von $U = \Phi_B(X)$ mit $X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$X^0 = \{ \xi \in \mathbb{Q}^3 \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } x \in X \} = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U^0 = \Phi_{B^*}(X^0)$$

Lemma 20.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

- ② Es seien $F \subseteq V^*$ ein Unterraum und $\Xi := \Phi_{B^*}^{-1}(F) \subseteq K^n$ der Unterraum der zugehörigen Koordinatenvektoren.

Dann gilt für den Prä-Annihilator 0F

$${}^0F = \Phi_B({}^0\Xi) \quad \text{mit} \quad {}^0\Xi = \{x \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } \xi \in \Xi\}.$$

Bestimmung von Prä-Annihilatoren mit Koordinatenvektoren

Beispiel 20.27

Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von B aufgespannt wird:

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

$$B^* = (p \mapsto p(0), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

Wir suchen den Prä-Annihilator von $F = \Phi_{B^*}(\Xi)$ mit $\Xi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$${}^0\Xi = \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } \xi \in \Xi\} = \text{Kern}([1 \ 1 \ 1]) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$${}^0F = \Phi_B({}^0\Xi)$$

§ 21 Duale Homomorphismen

dualer Homomorphismus ist tatsächlich linear

Lemma 21.2

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Homo}(V, W)$. Dann ist $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$.

Beweis. f^* ist additiv:

f^* ist homogen:

Beispiel 21.3

- 1 Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Dann gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$.

- 2 Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i: K^n \rightarrow K$ die Projektion auf die i -te Koordinate.

Beispiel 21.3

- ③ Es sei $V = K^{\llbracket 1,5 \rrbracket}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper K und f der Shift-Endomorphismus nach rechts:

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Lemma 21.4

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Dann gilt:

- 1 Die duale Abbildung der Synthese-Abbildung $\Phi_B: K^n \rightarrow V$ ist die Analyse-Abbildung $\Phi_{B^*}^{-1}: V^* \rightarrow K^n$, also $\Phi_B^* = \Phi_{B^*}^{-1}$.
- 2 Die duale Abbildung der Analyse-Abbildung $\Phi_B^{-1}: V \rightarrow K^n$ ist die Synthese-Abbildung $\Phi_{B^*}: K^n \rightarrow V^*$, also $\Phi_B^{-*} = \Phi_{B^*}$.

Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen

Lemma 21.5

Es seien U , V und W Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Homo}(V, W)$ und $g \in \text{Homo}(U, V)$ gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Beweis. Übung

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.6

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

①

$$f \mapsto f^*$$

ist ein injektiver AoC Homomorphismus.

Beweis.

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.6

- ② Sind V und W endlich-dimensional, dann ist D auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\text{Homo}(W^*, V^*)) = \dim(\text{Homo}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$$

Beweis.

Injektivität und Surjektivität von f und f^*

Satz 21.7

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

- 1 $f \in \text{Homo}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ surjektiv. ^{AoC}
- 2 $f \in \text{Homo}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ injektiv. ^{AoC}
- 3 $f \in \text{Homo}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ bijektiv. ^{AoC}
- 4 Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

§ 21.1 Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Satz 21.8

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ und $f \in \text{Homo}(V, W)$.

$$A = \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \quad \Rightarrow \quad A^T = \mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_W^*}(f^*)$$

Beweis.

Rang der dualen Abbildung

Folgerung 21.9

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Homo}(V, W)$ gilt $\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$.

Beweis.

Folgerung 21.10

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Für die duale Abbildung zu f_A gilt

$$(f_A)^* = f_{A^T}.$$

Beweis.

Transform. von Darstellungsmatrizen dualer Abbildungen

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_W \leftarrow \widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_W \leftarrow B_W} \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$$

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V^* \leftarrow \widehat{B}_W^*}(f^*) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^* \leftarrow B_V^*} \mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_W^*}(f^*) \mathcal{T}_{B_W^* \leftarrow \widehat{B}_W^*}$$