

Lineare Algebra II

Woche 01

13.04.2026, 14.04.2026 und 16.04.2026

§ 20 Dualräume

§ 20.1 Der Dualraum eines Vektorraumes

Erinnerung: Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K , dann bezeichnet

$$\text{Homo}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ist linear}\}$$

den Vektorraum der linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$.

Linearität von f heißt

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2 \in K \\ v_1, v_2 \in V \end{array}$$

Vektorraumstruktur von $\text{Homo}(V, W)$

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

(f + g) in Hom(V, W) ↘ W

$$(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$$

↘ ↘

Es gilt $\dim(\text{Homo}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

der Dualraum eines Vektorraumes

Definition 20.1 Spezialfall von $\text{Homo}(V, W)$ mit $W=K$

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Der Vektorraum

$$\underline{V^*} := \text{Homo}(V, K) = \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \rightarrow K$ heißt der **(alg.) Dualraum** von V .

Die Elemente von V^* heißen **lineare Funktionale** auf V oder **Linearformen** auf V oder **Covektoren**.

$0_{V^*} \in V^*$ heißt die Nullform.

$$0_{V^*}(v) = 0 \in K \quad \text{für alle } v \in V$$

Beispiel 20.2

- ① Projektion auf die i -te Koordinate ist eine Linearform auf K^n

$$\pi_i: K^n \ni x \mapsto x_i \in K$$

$$= \{f: X \rightarrow K\}$$

- ② Auswertungsabbildung ist eine Linearform auf K^X

X ist Menge, K ist Körper

$$E_{x_0}: K^X \ni f \mapsto f(x_0) \in K$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x_0 \in X \end{array}$$

Beispiel 20.2

- ③ Für $A \in K^{1 \times n}$ ist $f_A: K^n \rightarrow K$ eine Linearform auf K^n .

$$f_A: K^n \ni x \mapsto \underline{Ax} \in K$$

- ④ Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , dann hat $v^* \in V^*$ die Darstellungsmatrix

$$M_{(v_1) \dots (v_n)}(V^*) = [v^*(v_1) \ \dots \ v^*(v_n)] \in K^{1 \times n}$$

Beispiel 20.2

- 5 Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist die Ableitung $f'(v): V \rightarrow \mathbb{R}$ an jeder Stelle $v \in V$ eine Linearform auf V .

$$f'(v) : V \ni \underbrace{\delta v}_{\text{Richtungsabl.}} \mapsto \underbrace{f'(v)(\delta v)}_{\text{Richtungsabl.}} \in \mathbb{R}$$

zur Sprechweise und Bedeutung

Bemerkung 20.3

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so sagen wir zu $v^*(v)$:

- Wir **setzen** den Vektor v in die Linearform v^* **ein**.
- Wir **wenden** die Linearform v^* auf den Vektor v **an**.

Bemerkung 20.4

- Linearformen sind „Messgeräte“, mit denen Vektoren „gemessen“ werden. Das Ergebnis ist eine „Zahl“, also ein Element in K .
- Vektoren, Kovektoren und Skalare tragen oft physikalische Einheiten. Es gilt $[V^*] \cdot [V] = [K]$.

Beispiel: $[f(v)] = J = \text{Nm}$ (Energie), $[v] = m$ (Länge)

$$f'(v) \quad (\delta v)$$

$$N \quad m$$

Vektoren und Covektoren

primaler Vektorraum V

Vektoren sind Elemente von V

Vektoren „sind“ auch
lineare Abbildung

$$K \ni \alpha \mapsto \alpha \vee \in V$$

$$V \cong \text{Homo}(K, V)$$

dualer Vektorraum V^*

Covektoren sind Elemente von V^*

Covektoren sind lineare
Abbildungen in $\text{Homo}(V, K)$

duale Paarung

Definition 20.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle := v^*(v) \in K$$

alternative Notation:

heißt die **(kanonische) duale Paarung** von V^* und V .

↑ nicht abh. von der Wahl einer Basis

die duale Paarung ist linear in beiden Argumenten

Lemma 20.7

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear in beiden Argumenten, also

$$\langle \alpha v_1^* + \beta v_2^*, v \rangle = \alpha \langle v_1^*, v \rangle + \beta \langle v_2^*, v \rangle$$

$$\langle v^*, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \alpha \langle v^*, v_1 \rangle + \beta \langle v^*, v_2 \rangle \quad \text{Lch von } v^*$$

Beweis. $\langle \alpha v_1^* + \beta v_2^*, v \rangle = (\alpha v_1^* + \beta v_2^*)(v)$
 $= \alpha v_1^*(v) + \beta v_2^*(v) = \alpha \langle v_1^*, v \rangle + \beta \langle v_2^*, v \rangle$

Konstruktion von Linearformen

Erinnerung: Lineare Abbildungen sind durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

Satz 20.8

vgl. Satz 19.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .
Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

Die Zuordnung

$$I_B: V^* \ni v^* \mapsto \underbrace{\langle v^*, v_i \rangle_{i \in I}}_{\text{Familie der Bilder der Basis}} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

$$V \cong (K^I)_{00}$$

Beispiel 17.5

$$V^* \cong K^I$$

Dimension des Dualraumes

Folgerung 20.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $V \cong V^*$, also $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Beweis. $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V

Satz 20.8 Isomorphismus

$$I_B: V^* \rightarrow V^* \mapsto (\langle v^*, v_1 \rangle, \dots, \langle v^*, v_n \rangle) \in K_n$$

$$\text{Also: } V^* \cong K_n = V$$

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von V , dann bilden die Linearformen $v_i^* \in V^*$, $i = 1, \dots, n$, definiert durch

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

die zu B **duale Basis** von V^* .

Beweis. lineare Unabhängigkeit:

$$0 = \langle 0_{V^*}, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^*, v_j \right\rangle \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\langle v_i^*, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j$$

duale Basis: „Koordinatenermittler“

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^* , dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v_i^*, v \rangle}_{v_i^* \text{ ermittelt die } i\text{-te Koord. von } v \text{ bzgl. } B} v_i$$

und

$$v^* = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v^*, v_i \rangle}_{B^* \text{ erzeugt } v^*} v_i^*$$

Beweis.

v_i^* ermittelt die
 i -te Koord.
von v bzgl. B

v_i ermittelt die
 i -te Koord. von v^*
bzgl. B^*

Beispiel 20.13

① Es sei $V = K^n$ und $B = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis.

$B^* = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ Projektionen auf Koord.

$$\langle \pi_i, e_j \rangle = \langle \pi_i, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_j = \delta_{ij}$$

Beispiel 20.13

- ② Es sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedenen Elementen. Die charakteristischen Funktionen $B := (e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ bilden eine Basis von K^X .

Die zugehörige duale Basis ist $B^* := (E_{x_1}, \dots, E_{x_n})$, wobei E_{x_i} eine Funktion $X \rightarrow K$ an der Stelle $x_i \in X$ auswertet.

$$\begin{aligned}\langle E_{x_i}, e_{x_j} \rangle &= e_{x_j}(x_i) \\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

ϕ
Auswertungsfunktionale

Beispiel 20.13

③ Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von der Basis

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

aufgespannt wird.

Die duale Basis B^* kann in Form von Punktauswertungsfunctionalen dargestellt werden:

$$(p \mapsto p(0), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

1

0

0

0

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$$

duale Paarung: Auswertung mittels Koeffizientenvektoren

Lemma 20.14

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Sind

$$v^* = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^* \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

die Darstellungen von $v^* \in V^*$ bzw. $v \in V$ bzgl. dieser Basen, dann gilt

$$\langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j = \xi^T x$$

Beweis. $\langle v^*, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^*, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle$
 $= \sum_{i,j=1}^n \xi_i x_j \underbrace{\langle v_i^*, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$

Identifikation von $(K^n)^*$ mit K^n

Bemerkung 20.16

- Wir werden in K^n wann immer möglich die Standardbasis $B_n = (e_1, \dots, e_n)$ verwenden.
- Vektoren $v \in K^n$ stimmen dann mit ihren Koordinatenvektoren $x = \Phi_{B_n}^{-1}(v)$ überein.
- Im Dualraum $(K^n)^*$ verwenden wir dann die duale Basis $B_n^* = (\pi_1, \dots, \pi_n)$.
- Linearformen $v^* \in (K^n)^*$ werden über ihre Koordinatenvektoren $\xi = \Phi_{B_n^*}^{-1}(v^*) \in K^n$ dargestellt.
- Wir gehen einen Schritt weiter und identifizieren $\xi \in K^n$ mit $v^* \in (K^n)^*$ über den Isomorphismus $\Phi_{B_n^*}^{-1}$.

$$\langle v^*, v \rangle = \sum^T x$$

↑
wegen v^*

Bemerkung 20.17

- ① Ist $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V mit unendlicher Indexmenge I , dann ist zu B die gleichmächtige Familie $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

zwar linear unabhängig in V^* , aber kein Erzeugendensystem:

Die Linearformen v^* mit
 $\langle v_i^*, v_j \rangle = 1$ für alle $j \in I$
kann nicht dargestellt werden.

Bemerkung 20.17

- ② Jeder Vektorraum besitzt einen Dualraum, jedoch ist nicht jeder Vektorraum selbst ein Dualraum.

Beispielweise kann ein Dualraum keine abzählbar unendliche Basis besitzen.

Damit ist der Vektorraum $(K^{\mathbb{N}})_{00}$ der endlich getragenen Folgen über einem Körper K kein Dualraum.

§ 20.2 Transformationsmatrizen des Basiswechsels

primaler und dualer Basiswechsel

Lemma 20.18

vgl. Lemma 19.16

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* und

- $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\hat{B}_V = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ Basen von V
- $B_{V^*} = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ und $\hat{B}_{V^*} = (\hat{v}_1^*, \dots, \hat{v}_n^*)$ die dualen Basen dazu

Mit $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \hat{B}_V} = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow \hat{B}_V}(\text{id}_V)$ Transformationsmatrix

ist $T^{-T} = \mathcal{T}_{B_{V^*} \leftarrow \hat{B}_{V^*}} = \mathcal{M}_{B_{V^*} \leftarrow \hat{B}_{V^*}}(\text{id}_{V^*})$.

Für Koordinatenvektoren gilt

$$\begin{aligned} x &= T \hat{x} \\ &= \mathcal{J}_{B_V \leftarrow \hat{B}_V} \hat{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= T^{-T} \hat{\xi} \\ &= \mathcal{J}_{B_{V^*} \leftarrow \hat{B}_{V^*}} \hat{\xi} \end{aligned}$$

primärer und dualer Basiswechsel

Lemma 20.18

$$T = T_{B_V \leftarrow \hat{B}_V} \Rightarrow T^{-T} = T_{B_{V^*} \leftarrow \hat{B}_{V^*}} =: S$$

Beweis. $\hat{v}_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} v_i$ $\hat{v}_j^* = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i^*$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \hat{v}_i^*, \hat{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n s_{ki} v_k^*, \sum_{\ell=1}^n t_{\ell j} v_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n s_{ki} t_{\ell j} \underbrace{\langle v_k^*, v_\ell \rangle}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^n s_{ki} t_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (S^T T)_{ij} \Rightarrow I = S^T T \\ &\Rightarrow S = T^{-T} \end{aligned}$$

Bemerkung 20.19

Transformationen von **neu** nach **alt**:

$$\text{Basis } \hat{v}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} v_i \quad \text{Referenz}$$

$$\text{Koordinaten eines Vektors } \hat{x}_j = \sum_{i=1}^n (T^{-T})_{ij} x_i \quad \text{kontravariant}$$

$$\text{Koordinaten eines Kovektors } \hat{\xi}_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} \xi_i \quad \text{kovariant}$$

§ 20.3 Annihilatoren und Prä-Annihilatoren

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

① Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^0 := \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

$$= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \text{Kern}(v^*)\}$$

$$= \bigcap_{v \in M} \{v\}^0 \subseteq V^*$$

der **Annihilator** von M .

M^0 sammelt alle Linearformen, die auf
 $M \subseteq V$ verschwinden

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

② Für $F \subseteq V^*$ heißt

$$\begin{aligned} {}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= \bigcap_{v^* \in F} \text{Kern}(v^*) \subseteq V \end{aligned}$$

der **Prä-Annihilator** von F .

0F sammelt alle Vektoren, auf denen alle Linearformen in $F \subseteq V^*$ verschwinden.

Lemma 20.21

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

① $\{0_V\}^0 = V^*$ Alle Linearformen verschwinden in 0_V .

② $V^0 = \{0_{V^*}\}$ Nur die Nullform verschwindet auf ganz V .

③ ${}^0\{0_{V^*}\} = V$ Die Nullform bildet ganz V auf $0 \in K$ ab.

④ ${}^0(V^*) = \{0_V\}$ Der einzige Vektor, auf dem alle Linearformen verschwinden, ist 0_V .

↗
AoC

Annihilatoren und Prä-Annihilatoren sind Unterräume

Lemma 20.22

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

- 1 Ist $M \subseteq V$, dann ist M^0 ein Unterraum von V^* .
Weiter gilt $M^0 = \langle M \rangle^0$.
- 2 Ist $F \subseteq V^*$, dann ist 0F ein Unterraum von V .
Weiter gilt ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$.

Beweis der UR-Eigenschaft mit UR-Kriterium.

$$M \subseteq \langle M \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle M \rangle^0 \subseteq M^0$$

Ist $v^* \in M^0$, dann annihiliert v^* auch alle LK von M , d.h. v^* anni. auch $\langle M \rangle$.

D.h. $M^0 \subseteq \langle M \rangle^0$.

Basen von Annihilatoren und Prä-Annihilatoren

Satz 20.23

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

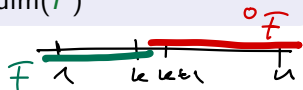
- ① Ist (v_1, \dots, v_k) eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von U^0 , also gilt

$$\begin{aligned}\dim(U^0) &= \dim(V) - \dim(U) \\ &= \operatorname{codim}(U)\end{aligned}$$



- ② Ist (v_1^*, \dots, v_k^*) eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist (v_{k+1}, \dots, v_n) eine Basis von 0F , also gilt

$$\begin{aligned}\dim({}^0F) &= \dim(V^*) - \dim(F) = \dim(V) - \dim(F) \\ &= \operatorname{codim}({}^0F)\end{aligned}$$



alle Unterräume sind Prä-Annihilatoren^{AoC}

Lemma 20.25

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt

$$U = \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*) = {}^0(U^0)$$

Bestimmung von Annihilatoren mit Koordinatenvektoren

Analyse-Abb.

Lemma 20.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

- 1 Es seien $U \subseteq V$ ein Unterraum und $X := \Phi_B^{-1}(U) \subseteq K^n$ der Unterraum der zugehörigen Koordinatenvektoren.

Dann gilt für den Annihilator $U^0 \subseteq V^*$

$$U^0 = \Phi_{B^*}(X^0) \quad \text{mit} \quad X^0 = \{\xi \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } x \in X\}.$$

Id. von
 $(K^n)^*$ mit K^n

Lösung eines homogenen LGS

Bestimmung von Annihilatoren mit Koordinatenvektoren

Beispiel 20.27

Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von B aufgespannt wird:

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

$$B^* = (p \mapsto p(0), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), \quad p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

Wir suchen den Annihilator von $U = \Phi_B(X)$ mit $X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$U = \left\{ t \mapsto \alpha_1(1+t) + \alpha_2 t^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$X^0 = \left\{ \xi \in \mathbb{Q}^3 \mid \underbrace{\xi^T}_x \xi = 0 \text{ f\"ur alle } x \in X \right\} = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U^0 = \Phi_{B^*}(X^0) = \left\langle p \mapsto -p(0) + \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1) \right\rangle$$

Probe: Diese LF annihiliert $t \mapsto (1+t)$ und $t \mapsto t^2$.

Lemma 20.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

- ② Es seien $F \subseteq V^*$ ein Unterraum und $\Xi := \Phi_{B^*}^{-1}(F) \subseteq K^n$ der Unterraum der zugehörigen Koordinatenvektoren.

Dann gilt für den Prä-Annihilator 0F

$${}^0F = \Phi_B({}^0\Xi) \quad \text{mit} \quad {}^0\Xi = \{x \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } \xi \in \Xi\}.$$

Id. von $(K^n)^*$ mit K^n homogenes LGS

Beispiel 20.27

Es sei $V \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Unterraum, der von B aufgespannt wird:

$$B = (t \mapsto 1, \quad t \mapsto t, \quad t \mapsto t^2)$$

$$B^* = (p \mapsto p(0), p \mapsto \frac{1}{2}p(1) - \frac{1}{2}p(-1), p \mapsto \frac{1}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - p(0))$$

Wir suchen den Prä-Annihilator von $F = \Phi_{B^*}(\Xi)$ mit $\Xi = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$.

$$F = \left\{ p \mapsto \alpha p(1) \mid \alpha \in \mathbb{Q} \right\}$$

$${}^0\Xi = \left\{ x \in \mathbb{Q}^3 \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } \xi \in \Xi \right\} = \text{Kern}([1 \ 1 \ 1]) = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

$${}^0F = \Phi_B({}^0\Xi) = \langle t \mapsto t^{-1}, \quad t \mapsto t^2 - 1 \rangle$$

Probe: Beide werden tatsächlich von $p \mapsto p(1)$ annihiliert.

§ 21 Duale Homomorphismen

dualer Homomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} K & \xleftarrow{w^*} & W & \xleftarrow{f} & V \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & v^* = w^* \circ f & & \end{array}$$

Definition 21.1

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Homo}(V, W)$. Dann heißt $f^*: W^* \rightarrow V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f \in V^*, \text{ also } f^* = \cdot \circ f$$

der zu f **duale** oder **transponierte Homomorphismus**.

$v^* = w^* \circ f$ heißt der **Pullback** von w^* durch f .

$$\begin{aligned} f^*(w^*)(v) &= w^*(f(v)) && \forall v \in V, \forall w^* \in W^* \\ \langle f^*(w^*), v \rangle_{V^*, V} &= \langle w^*, f(v) \rangle_{W^*, W} \\ f^* \text{ "pullt" Covektoren } W^* \rightarrow V^* &&& f \text{ "pusht" Vektoren } V \rightarrow W \end{aligned}$$

dualer Homomorphismus ist tatsächlich linear

Lemma 21.2

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Homo}(V, W)$. Dann ist $f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$.

Beweis. f^* ist additiv:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1^* + \omega_2^*) &= (\omega_1^* + \omega_2^*) \circ f = \omega_1^* \circ f + \omega_2^* \circ f \\ &= f^*(\omega_1^*) + f^*(\omega_2^*) \end{aligned}$$

f^* ist homogen:

$$f^*(\alpha \omega^*) = (\alpha \omega^*) \circ f = \alpha (\omega^* \circ f) = \alpha f^*(\omega^*)$$

dualer Homomorphismus

Beispiel 21.3

- ① Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Dann gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$.

$$\begin{aligned} \langle \text{id}_V^*(v^*), v \rangle_{V^*, V} &= \langle v^*, \text{id}_V(v) \rangle_{V^*, V} \\ &= \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} \quad \forall v \in V \quad \forall v^* \in V^* \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{id}_V^*(v^*) = v^*$.

- ② Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i: K^n \rightarrow K$ die Projektion auf die i -te Koordinate.

$$\pi_i^*: K^* \rightarrow (K^n)^*$$

$\cong K$ $\cong K^n$

$$\pi_i^*(\alpha)^T x = \alpha \pi_i(x) = \alpha x_i$$

$\alpha \in K$
 $x \in K^n$
 $x_i \in K$

repr. duale Paarung $(K^n)^* \times K^n$ repr. duale Paarung $K^* \times K$

$\forall \alpha \in K$
 $\forall x \in K^n$

$$\Rightarrow \pi_i^*(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ --- } i\text{-te Zeile}$$

Beispiel 21.3

- Es sei $V = K^{\mathbb{[1,5]}}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper K und f der Shift-Endomorphismus nach rechts:

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$v^* = f^*(w^*)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{v^*}_{=f^*(w^*)}, (y_1, \dots, y_5) \rangle &= \langle w^*, f(y_1, \dots, y_5) \rangle \\ &= \langle w^*, (0, y_1, \dots, y_4) \rangle \end{aligned}$$

z.B. $\langle w^*, (z_1, \dots, z_5) \rangle = z_3 + z_4$

$\uparrow = 0 \quad \langle v^*, (y_1, \dots, y_5) \rangle = y_2 + y_3$

„bestimmtes Messgerät“

Dualisieren der Synthese-Abbildung und Analyse-Abb.

Lemma 21.4

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Dann gilt:

- 1 Die duale Abbildung der Synthese-Abbildung $\Phi_B: K^n \rightarrow V$ ist die Analyse-Abbildung $\Phi_{B^*}^{-1}: V^* \rightarrow K^n$, also $\Phi_B^* = \Phi_{B^*}^{-1}$.

\uparrow
bei Id. $(K^n)^* \cong K^n$

- 2 Die duale Abbildung der Analyse-Abbildung $\Phi_{B^*}^{-1}: V^* \rightarrow K^n$ ist die Synthese-Abbildung $\Phi_B: K^n \rightarrow V$, also $\Phi_{B^*} = \Phi_B^{-1}$.

\uparrow
bei Id. $(K^n)^* \cong K^n$

Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen

Lemma 21.5

Es seien U , V und W Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Homo}(V, W)$ und $g \in \text{Homo}(U, V)$ gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Beweis. Übung

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.6

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

① Dualisierungsabbildung

$$D: \text{Homo}(V, W) \ni f \mapsto f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$$

ist ein injektiver AoC Homomorphismus.

Beweis. • D ist additiv: $[D(f+g)](w^*) = w^* \circ (f+g) \in V^*$
 $= w^* \circ f + w^* \circ g = [Df](w^*) + [Dg](w^*) \quad \forall w^* \in W^*$

• D ist homogen

• D ist injektiv: $f \in \text{Kern}(D)$, d.h. $f^* = D(f) = 0 \in \text{Homo}(W^*, V^*)$
 $\Rightarrow f^*(w^*) = w^* \circ f = 0_{V^*}$, d.h. $w^*(f(v)) = 0 \in K \quad \forall w^* \in W^* \quad \forall v \in V$

Das heißt $f(v) \in \bigcap_{w^* \in W^*} \text{Kern}(w^*) = 0(W^*)$

Lemma 20.21 $\Rightarrow 0(W^*) \stackrel{\text{AoC}}{=} \{0_W\}$. Also ist $f=0 \in \text{Homo}(V, W)$.

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.6

- ② Sind V und W endlich-dimensional, dann ist D auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\text{Homo}(W^*, V^*)) = \dim(\text{Homo}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$$

Beweis.

Injektivität und Surjektivität von f und f^*

Satz 21.7

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

- 1 $f \in \text{Homo}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ surjektiv. ^{AoC}
- 2 $f \in \text{Homo}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ injektiv. ^{AoC}
- 3 $f \in \text{Homo}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Homo}(W^*, V^*)$ bijektiv. ^{AoC}
- 4 Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Wir können daher einfach f^{-*} schreiben.

§ 21.1 Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Satz 21.8

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ und $f \in \text{Homo}(V, W)$.

$$A = M_{B_W \leftarrow B_V}(f) \Rightarrow A^T = M_{B_V^* \leftarrow B_W^*}(f^*) =: B$$

dualle Basen

Beweis. • $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$ für $j=1, \dots, m$

• Wende w_k^* an:

$$\langle f^*(w_k^*), v_j \rangle_{V^*, V} = \langle w_k^*, f(v_j) \rangle_{W^*, W} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underbrace{\langle w_k^*, w_i \rangle}_{=\delta_{ki}} = a_{kj}$$

• B erfüllt $f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^m b_{ij} v_i^* \in V^*$

Setze v_k ein:

$$\langle f^*(w_j^*), v_k \rangle = \sum_{i=1}^m b_{ij} \underbrace{\langle v_i^*, v_k \rangle}_{=\delta_{ik}} = b_{kj} = a_{jk}$$

Rang der dualen Abbildung

Folgerung 21.9

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Homo}(V, W)$ gilt $\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$.

Beweis.

duale Abbildung der von einer Matrix induzierten Abbildung

$$f_A(x) = Ax$$

$$f_A \in \text{Hom}(K^m, K^n)$$

Folgerung 21.10

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Für die duale Abbildung zu f_A gilt

$$(f_A)^* = f_{A^T}.$$

bei Id. $(K^n, K^n)^$ und $(K^m, K^m)^*$*

Hom (K^n, K^m)

Beweis.

Transform. von Darstellungsmatrizen dualer Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{B}_W \leftarrow \widehat{B}_V}(f) &= \mathcal{T}_{\widehat{B}_W \leftarrow B_W} \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V} \\ \widehat{A} &= S^{-1} A T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{B}_V^* \leftarrow \widehat{B}_W^*}(f^*) &= \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^* \leftarrow B_V^*} \mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_W^*}(f^*) \mathcal{T}_{B_W^* \leftarrow \widehat{B}_W^*} \\ \widehat{A}^T &= T^T A^T S^{-T} \end{aligned}$$