

Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Wochen 06/07



Link zu diesen Folien

Introductory Class into \LaTeX

In the future, Roland Herzog and I (Georg Müller) will be offering an introductory class into the text typesetting system \LaTeX .

Basic Class Information

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| ① „Introduction to Latex“ | ④ 2h lecture+2h exercises/week |
| ② teaching language is english | ⑤ 3 ECTS „ÜK“ |
| ③ offered every winter semester | ⑥ pass/fail in-class-examination |

Goals

Upon finishing the class, students are able to:











- ① configure a \LaTeX system (locally or online)
- ② structure and edit complex \LaTeX projects
- ③ identify and correct compile errors
- ④ select and utilize external packages
- ⑤ implement and use \LaTeX macros

Documents











- ① Presentations
- ② Theses
- ③ CVs
- ④ Letters
- ⑤ ...

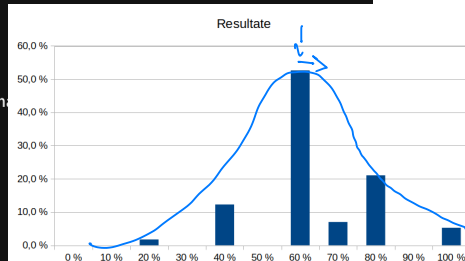
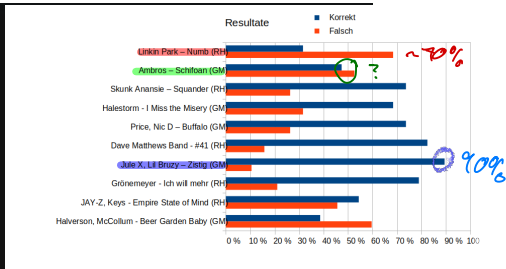
No pre-class requirements

Tastebreaker-Quiz (5 Titel je Dozent)

-  **Numb**
Linkin Park
-  **Schifoan**
Wolfgang Ambros
-  **Squander - Live and Acoustic**
Skunk Anansie
-  **I Miss the Misery**
Halestorm
-  **Buffalo**
Connor Price, Nic D
-  **#41 - Live at Continental Airlines Arena, East Rutherford, NJ - September 1999**
Dave Matthews Band
-  **Zistig**
Jule X, Lil Bruzy
-  **Ich will mehr - Unplugged / Remastered 2016**
Herbert Grönemeyer
-  **Empire State Of Mind**
JAŸ-Z, Alicia Keys
-  **Beer Garden Baby**
Tyler Halverson, Parker McCollum

Tastebreaker-Quiz (5 Titel je Dozent)

RH		Numb Linkin Park
GM		Schifoan Wolfgang Ambros
RH		Squander - Live and Acoustic Skunk Anansie
GM		I Miss the Misery Halestorm
GM		Buffalo Connor Price, Nic D
RH		#41 - Live at Continental Airlines Arena, East Rutherford, NJ - September 1999 Dave Matthews Band
GM		Zistig Jule X, Lil Bruzy
RH		Ich will mehr - Unplugged / Remastered Herbert Grönemeyer
RH		Empire State Of Mind JAY-Z, Alicia Keys
GM		Beer Garden Baby Tyler Halverson, Parker McCollum



Das heutige Programm

- 1 Wochenüberblick
- 2 Wochenwiederholung in wenigen Folien:
 - 1 Polynome
 - 2 Moduln
 - 3 Algebren
- 3 Übersicht der Kombination bekannter Strukturen
- 4 Intuition zu Moduln
- 5 Sinn der Vektorraumkonzepte in Moduln
- 6 Genauerer Blick auf das Untermodulkriterium
- 7 Zusammenspiel der Modul- und Ringeigenschaften in Algebren
- 8 Beispiel zu Einsetzungsoperationen
- 9 Übersicht Faktorstrukturen

Wochenüberblick

Vektorräume und
- Homomorphismen

Basen, Dimensionen LA I
Darstellungsmatrizen für
Homom. $M_{B_v \leftarrow B_v}$
(Rechnungsform)

Eigenwerte
(Eigenvektoren) folgt
Darstellungsmatrizen für
Endomorphismen $M_{B_v \leftarrow B_v}$

LA II W 1-5

Qualität
Multiplizität
Determinante

↓ W 6/7

Polynome
Algebra/Eigenwerte

Wochenwiederholung

Bemerkung 28.5 *Eukl. g.c.f. Folgen*

- $(R^{\mathbb{N}_0})_{00}$ ist eine „neutrale“ Formulierung des Polynomringes
- zwei Polynome sind gleich, wenn die Folgen übereinstimmen
- **konstante Polynome**
 $(\alpha_0, 0, 0, \dots)$
- **lineare Polynome**
 $(\alpha_0, \alpha_1, 0, 0, \dots)$

Formale Summen mit freiem Element

- $R[t]$ ist eine isomorphe Darstellung unter Verwendung der Variable t *$t+t+t=3t$
 αt t^2 t^3*
- zwei Polynome sind gleich, wenn die Koeffizienten aller Potenzen von t übereinstimmen
- **konstante Polynome**
 $\alpha_0 t^0$
- **lineare Polynome**
 $\alpha_0 t^0 + \alpha_1 t^1$

$$3t^{-2} + 5t + 1t^4$$



Moduln über kommutativen Ringen

Definition 29.1

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein R -Modul $(M, +, \cdot)$ hat

$$+ : M \times M \rightarrow M$$

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

- ① $(M, +)$ ist abelsche Gruppe \longleftrightarrow ① $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
② gemischtes Assoziativgesetz \longleftrightarrow ② gemischtes Assoziativgesetz

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$$

Handwritten annotations: R under $\alpha \cdot \beta$, $2x$ under $\beta \cdot u$

gemischte Distributivgesetze

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$$

Definition 11.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein K -Vektorraum $(V, +, \cdot)$ hat

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

- ① $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
② gemischtes Assoziativgesetz

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$$

Handwritten annotations: \downarrow under $\alpha \cdot \beta$, $2x$ under $\beta \cdot u$

gemischte Distributivgesetze

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$$

Moduln über kommutativen Ringen

Definition 29.1

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein **R -Modul** $(M, +, \cdot)$ hat

$$+ : M \times M \rightarrow M$$

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

- ③ M heißt **unitärer Modul**, wenn $1 \in R$ existiert und neutral bzgl. der S -Multiplikation \cdot ist

$$\underline{1 \cdot u = u}$$

Definition 11.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein **K -Vektorraum** $(V, +, \cdot)$ hat

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

- ③ $1 \in K$ ist neutral bzgl. der S -Multiplikation \cdot .

$$\underline{1 \cdot u = u}$$

Unitäre Modul über Körper sind Vektorräume

Modul über Körper ist nicht unbedingt ein VR!

Bsp! Null-S-Mult. für beliebige abelsche Gruppe

Definition 29.16

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über \mathbb{Z} nicht frei

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

\downarrow über $\{\mathbb{Z}\}$ lin. abh.

- 1 Ein unitärer R -Modul $(M, +, \cdot)$ heißt **frei**, wenn es ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (eine **Basis**) von M gibt.
- 2 Ein unitärer R -Modul $(M, +, \cdot)$ heißt **endlich frei**, wenn es ein endliches, linear unabhängiges Erzeugendensystem (eine endliche Basis) von M gibt.

Lemma 29.18 *Manche Resultate übertragen sich*

Es seien R ein kommutativer Ring, M ein R -Modul und $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von M . Dann gilt:

Jeder Vektor $v \in M$ lässt sich in eindeutiger Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus Basisvektoren linearkombinieren.

Algebren über kommutativen Ringen

Definition 29.22

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein komm. Ring. Eine R -Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ erfüllt:

- 1 $(A, +, \cdot)$ ist ein R -Modul. (VR zulässig) $(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot C) + \alpha_2 \cdot C$
- 2 $(A, +, \star)$ ist ein Ring. $t^k = \underbrace{t \cdot \dots \cdot t}_k$
- 3 Die **Multiplikation** \star ist verträglich mit der \cdot -Multiplikation:

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b)$$

} für kommut. Ver.
Einsatzesatz
und Mult.

liefert alles, was für "Einsatzesatz" für Polynome benötigt wird.

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \leftarrow \text{Komm. f. A. nicht nötig.}$$

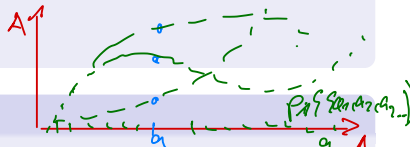
Einsetzungshomomorphismus

Definition 30.3

Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und $(A, +, \cdot, \star)$ eine unitäre R -Algebra mit Eins. Für $a \in A$ heißt die Abbildung

p variiert, a fix $ev_a: R[t] \ni p \mapsto ev_a(p) := p(a) \in A$ eval($\{p_1, p_2, p_3\}$)

der **Einsetzungshomomorphismus zu a** .



Definition 30.8

Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und $(A, +, \cdot, \star)$ eine unitäre R -Algebra mit Eins. Für $p \in R[t]$ mit $p = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$ heißt die Abbildung

$$p(\cdot): A \ni a \mapsto p(a) = \sum_{k=0}^n \alpha_k a^k \in A$$

a variiert, p fix

die **durch p induzierte Polynomfunktion** auf der Algebra A .

Definition 31.9

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$. Das Element $\lambda \in K$ heißt eine **Nullstelle** oder **Wurzel von p in K** , wenn $p(\lambda) = 0$ gilt.

Satz 31.12

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom, $p \neq 0$. Dann gilt:

- 1 Es existieren $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ sowie Exponenten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $q \in K[t]$ ohne Nullstelle in K , sodass gilt:

$$p = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$$

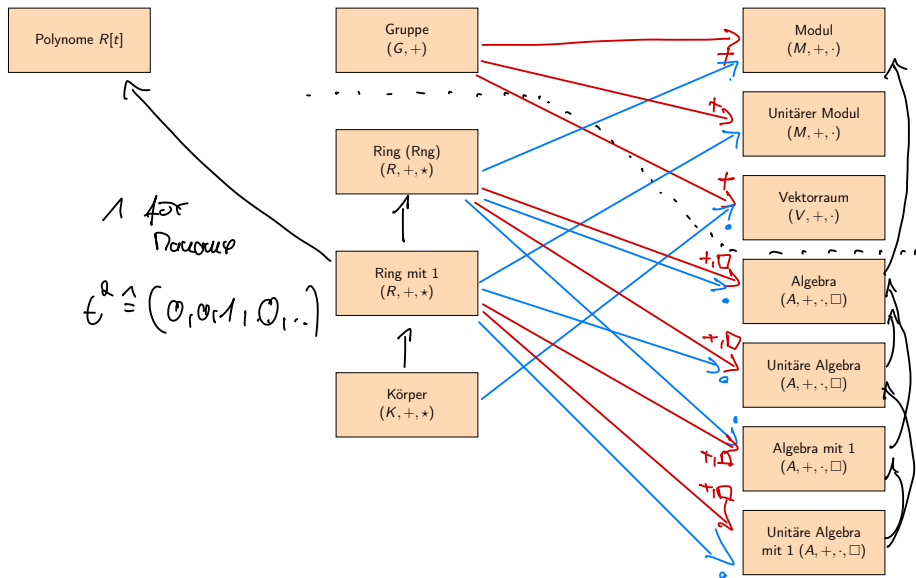
*Nullstellen linearer Faktoren
als Produkt*

Weiter gilt $\deg(p) = n_1 + \dots + n_s + \deg(q)$. *max Anzahl von Nullstellen durch Pol.grad begrenzt*

- 2 Die Nullstellen von p sind genau die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$.

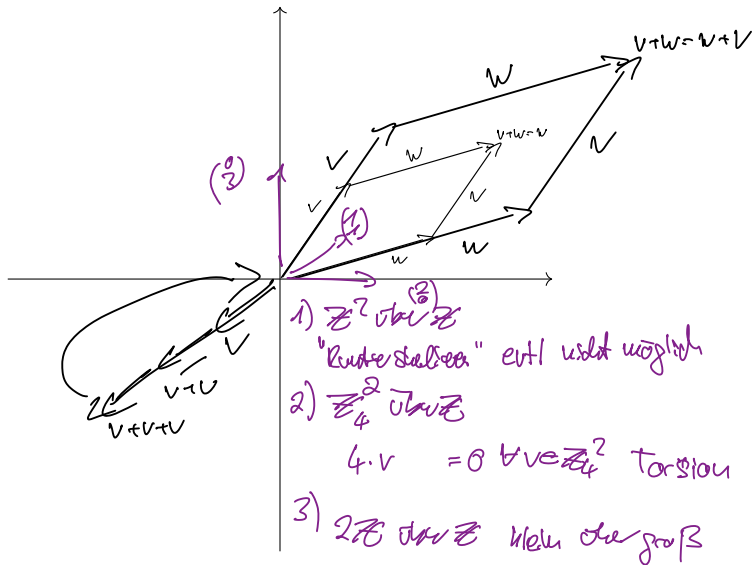
Übersicht

Übersicht - Kombination von Strukturen (Alle $+$, \cdot Verknüpfungen)



Moduln

Intuition zu Moduln



Vektorraumkonzepte in allgemeinen Moduln

- 1 Unterräume Untermoduln, Kriterien gleich, Kriterien ändern sich
- 2 Linearkombination $\rightarrow \sum_{i=1}^n r_i \cdot v_i$, Kriterien weitestg. gleich aber.
- 3 Erzeugendensysteme Darst. i.A. nicht eine Skalierung
- 4 Lineare (Un-)Abhängigkeit Grundsätzlich gleich, manche Folgerungen gelten nicht (v_i) lin. abh. $\Rightarrow \exists i_0 \ v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i$
- 5 Basen
Müssen nicht ex., können versch. Kard. haben (allg. Ring ohne IBN)
- 6 Faktorräume
Faktorstruktur ...
- 7 Darstellungsmatrizen
Eingedrückt sinnvoll
- 8 (Bi-)Dualräume
Kann man untersuchen, Ersetzungslemma evtl. nicht mehr negativ.

Charakterisierung der \mathbb{Z} -Moduln

Die \mathbb{Z} -Moduln sind gerade die abelschen Gruppen.

1) Ist $(M, +, \cdot)$ ein \mathbb{Z} -Modul, dann ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

2) Ist $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, dann ist $(G, +, \cdot)$ mit

$$z \cdot g := \underbrace{(g + \dots + g)}_{z\text{-mal}} \quad \otimes$$

ein \mathbb{Z} -Modul.

1)

$$\text{g.A.: } u \cdot (u \cdot g) = (u \cdot g) + \dots + (u \cdot g) = \underbrace{(g + \dots + g)}_u + \dots + \underbrace{(g + \dots + g)}_u = (u \cdot u) \cdot g$$

$$\text{g.D.: } u \cdot (a + b) = (a + b) + \dots + (a + b) = \underbrace{(a + \dots + a)}_u + \underbrace{(b + \dots + b)}_u = u \cdot a + u \cdot b \quad \dots$$

2) Teil der Definitoren, \otimes gilt da

$$z \cdot g = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_z \cdot g = g + \dots + g$$

Beispiel - Modulbasen verschiedener Kardinalitäten

Beispiel

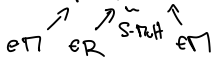
abzählbar

Sei V ein K -Vektorraum mit Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $\text{Endo}(V)$ aufgefasst als Modul über sich selbst eine n -elementige Basis.

Nicht-komm. Ring $(\text{Endo}, +, \circ)$ (Komm. Ringe mit Eins besitzen IBN)

$n=1$: (id) ist Basis (Eins Element) da:

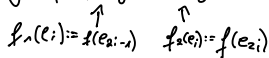
• Erzeugend: Für $f \in \text{Endo}$ gilt $f = f \circ \text{id}$



• Lin. Unabhängigkeit: $0 = \alpha \circ \text{id} \Rightarrow \alpha = 0$

$n=2$:
Setze $g_1(e_i) := \begin{cases} e_{\frac{i+1}{2}} & i \text{ ungerade} \\ 0 & i \text{ gerade} \end{cases}$
 $g_2(e_i) := \begin{cases} e_{\frac{i}{2}} & i \text{ gerade} \\ 0 & i \text{ ungerade} \end{cases}$

• Erzeugend: $f = f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2$



$n=3, \dots$ (f_1, f_2) Basis

• Lin. unabh.: $0(e_i) = \alpha \circ g_1(e_i) + \beta \circ g_2(e_i) \Rightarrow \begin{cases} \beta(e_i) \\ \alpha(e_{\frac{i+1}{2}}) \end{cases}$

Untermodulkriterium mit einem Skalar

Aufgabe

Es sei $(M, +, \cdot)$ ein R -Modul und $U \subseteq M$. ~~Beweisen oder widerlegen~~
Sie: U ist genau dann ein Untermodul von M , wenn U nichtleer ist und
für alle $u, \bar{u} \in U$ und $\alpha, \beta \in R$ gilt, dass

$$\alpha u + \beta \bar{u} \in U.$$

$$\begin{array}{c} \alpha u + (\beta u + \gamma v) \in U \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha u \quad \beta u + \gamma v \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \in R \quad \beta \in R \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \gamma \in \mathbb{Z} \quad \delta \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Besuchspl. $M = \mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}, U = \{0, 1\}, S = M \cup \{ \text{immer Wert } \{0\} \}$

$$2 \cdot 1 = 1 + 1 \notin U \text{ also kein Untermodul}$$

$\alpha u + \bar{u} \in U \forall u, \bar{u} \in U, \alpha \in K$ geht auch nicht im Produkt, aber

$$M = \mathbb{Z}, U = 2\mathbb{Z} + 1, R = 2\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c} \alpha u + \bar{u} \in 2\mathbb{Z} + 1 \leftarrow \text{keine Untergruppe} \\ \alpha \in 2\mathbb{Z} \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{array}$$

Algebren

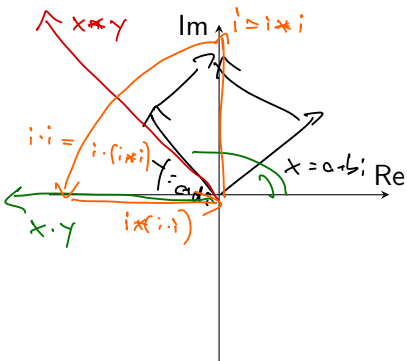
Beispiel einer Nicht-Algebra

\mathbb{C} als \mathbb{C} Vektorraum mit komponentenweiser Ringmultiplikation

Wir betrachten

$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 $+$: $(a + bi, c + di) \mapsto (a + c) + (b + d)i$
 \cdot : $(a + bi, c + di) \mapsto (ac - bd) + (ad + bc)i$
 $*$: $(a + bi, c + di) \mapsto (ac) + (bd)i$

Üblicher Körper als VL über sich selbst
 können Ring mit $(1+i)$



$$i \cdot *(i, i) = i \cdot (i * i) = i \cdot i = -1$$

$$*(i, i) = *(-1, i) = 0 \neq -1$$

komponenten- und absenweise Multiplikation

sind nicht (gewissermaßen) assoziativ verträglich

Zusammenspiel der Vektorraum- und Ringeigenschaften

Lemma: *unitate*

Jede endlichdimensionale und nullteilerfreie K -Algebra $(A, +, \cdot, *)$ mit $\overset{VR}{\text{Einselement}}$ ist eine Divisionsalgebra. \leftarrow Es existieren in $A \setminus \{0\}$ $*$ -Inverse, diese kommutieren, evtl. nicht.

Beweis:

Es gibt $1 \in A$ bzgl. $*$. *Nullteilerfreiheit* bedeutet, dass $a * b \neq 0 \forall a, b \in A \setminus \{0\}$
Ringeigenschaft

Also sind $f_a: b \mapsto a * b$ injektive Endomorphismen auf A

$f_a: b \mapsto a * b$

für $a, b \in A \setminus \{0\}$

Lineare Abb. *VR Eigenschaft*
wegen der Vertauschbarkeit von \cdot und $*$

A endlichdimensional $\Rightarrow f_a, f_b$ auch surjektiv (Dimensionsatz)

$\Rightarrow \forall a \in A \setminus \{0\} \exists b: a * b = 1$, das ist gerade a^{-1} \leftarrow *R. Eigensch.* \square

Beispiel der zwei Einsetzungssichtweisen

↙ Je eine Einsetzungssicht.

Wie sehen die möglichen Einsetzungen von $\{t^k \mid k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\} \subseteq \mathbb{R}[t]$ und

$$\left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{3 \times 3}}_A \text{ über } \underbrace{\mathbb{R}}_K$$

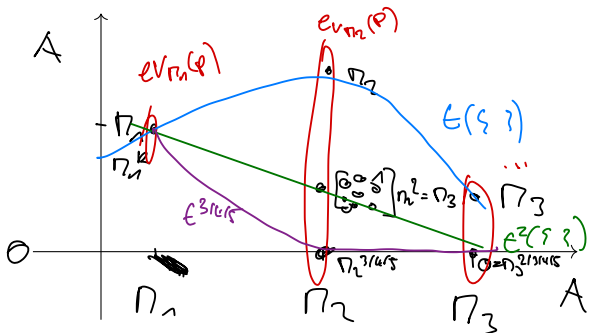
aus?

Π_1

Π_2

Π_3

↖ Je eine Einsetzung



Übersicht: Darstellung erzeugter Objekte

Struktur	Unterstruktur	Faktorstruktur
Gruppe (G, +)	Untergruppe. $E \subseteq G$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid a_i \in \pm E \right\}$	Normalteiler. $E \subseteq G$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^n (g_i + a_i - g_i') \mid a_i \in \pm E, g_i \in G \right\}$
Ring (R, +, ·)	Unterring. $E \subseteq R$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_j} a_{ij} \mid a_{ij} \in \pm E \right\}$	Ideal. $E \subseteq R$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid a_i \in \pm E U E U R E U R E U R E U R E \right\}$
Körper (K, +, ·)	Unterkörper. $E \subseteq K$ erzeugt $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_j} a_{ij}}{\sum_{i=1}^o \prod_{j=1}^{p_i} b_{ij}} \mid a_{ij}, b_{ij} \in \pm E \right\}$	Nicht sinnvoll
Vektorraum (V, +, ·)	Unterraum. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid v_i \in E, \alpha_i \in K \right\}$	Unterraum
Modul (V, +, ·)	Untermodul. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{ \sum_{i=1}^h \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \bar{v}_j \mid v_i, \bar{v}_j \in \pm E, \alpha_i \in R \right\}$	Untermodul
Algebra (A, +, ·, *)	Unteralgebra. $E \subseteq A$ erzeugt $\left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^h \alpha_i}_{\cup \cap} * \underbrace{\sum_{j=1}^k a_{ij} + \sum_{i: j =1}^{m,l} \tilde{a}_{il}}_{\cup R} \mid \begin{matrix} \alpha_i \in R \\ a_{ij} \in E \\ \tilde{a}_{ij} \in \pm E \end{matrix} \right\}$	Algebra-Ideal (Untermodul & Ideal) $\left\{ \sum_{i=1}^h \alpha_i * \sum_{j=1}^k a_{ij} + \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{il} \mid \begin{matrix} \alpha_i \in R \\ a_{ij} \in E \\ \tilde{a}_{ij} \in \pm E \\ \cup \cap \\ \cup \cap \\ \cup \cap \end{matrix} \right\}$

Polynome über Körpern

Größte gemeinsame Teiler in \mathbb{N} – Euklidischer Algorithmus

Definition

Besser in \mathbb{Z} formulieren! Braucht Ring

Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind die Teiler $D(n, m) := \{t \in \mathbb{N} \mid t \mid n \wedge t \mid m\}$ und

$\text{ggT}(n, m) := k \in D(n, m)$, so dass $t \mid k \forall t \in D(n, m)$.

Man kann ihn durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für 98 und 35:

$$98 = (35) \cdot 2 + 28$$

7 teilt 98 und 35

\uparrow

$$35 = (28) \cdot 1 + 7$$

7 teilt 35

\uparrow

$$28 = 7 \cdot 4 + 0$$

7 teilt 28

7 ist ggT v. 98, 35

7 Teiler

kyen. $d \in D(98, 35) \Rightarrow d \mid 28$

\Downarrow

$d \in D(35, 28) \Rightarrow d \mid 7$

7 ist ggT

Größte gemeinsame Teiler in $K[t]$ – Euklid. Algorithmus

Definition

Für $p, q \in K[t]$ sind die Teiler $D(p, q) := \{d \in K[t] \mid d \mid p \wedge d \mid q\}$ und

$\text{ggT}(p, q) := \{k \in D(p, q) \text{ höchsten Grades} \mid d \mid k \forall d \in D(p, q)\}$.

Man kann sie durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für $p := t^3 - 1$ und $q := t^3 - t^2 + t - 1$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$

$t^3 - t^2 + t - 1 = (t^3 - 1) \cdot 1 + (-t^2 + t)$	$(t-1) \mid t^3 - t^2 - 1$	$d \in D(p, q) \Rightarrow d \mid (-t^2 + t)$
$(t^3 - 1) = (-t^2 + t) \cdot (-t - 1) + (t - 1)$	\Downarrow $(t-1) \text{ teilt } (t^3 - 1)$	\Downarrow $d \in D(p, t^3 - 1) \Rightarrow d \mid (t - 1)$
$(-t^2 + t) = (t - 1)(-t) + 0$	\Uparrow $(t-1) \text{ teilt } -t^2 + t$	$(t-1) \text{ ggT}$
	$(t-1) \text{ Teiler}$	

Polynome über Polynomen

Polynome werden über komm. Ringen mit Eins definiert und formen dann einen komm. Ring mit Eins. Wie sehen Polynome über Polynomen aus?

$$(\mathbb{R}[S])[t] = \underbrace{p_0}_{a_{00} + a_{01}S + \dots} + \underbrace{p_1 t}_{a_{10} + a_{11}S + \dots} + p_2 t^2 + \underbrace{p_3 t^3}_{a_{30} + a_{31}S + \dots} \dots$$

$$\hat{=} \left((a_{00}, a_{01}, \dots), (a_{10}, a_{11}, \dots), \dots \right)$$

Polynome in mehreren Variablen

Wie könnte man Polynome in mehreren Variablen definieren?

! sowohl als $(\mathbb{R}[t])[s]$ oder als $\mathbb{R}_{\infty}^{n \times n}$

Man sieht Terme der Form $a_{00} + a_{10}t + a_{01}s + a_{11}ts + a_{21}t^2s + \dots$

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^{h_k} a_{ki} s^i \right) t^k \longmapsto \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{h_k} a_{ki} s^i t^k \quad \text{ist Ringisomorphismus}$$