Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 05

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in wenigen Folien:
   1. Determinatenformen
   2. Determinante
   3. Minoren, Adjunkte etc
   4. Determinante von Endomorphismen
   5. Orientierung in Vektorräumen
3. Kurzquiz
4. Der „Abstecher“ über Determinantenformen
5. Interpretation - Volumen von Parallelotopen, Orientierung
6. Flowchart zur Determinantenberechnung
7. Satz von Binet-Cauchy
8. Ganzzahlige Matrizen mit ganzzahliger Inversen

Wochenüberblick

Wochenwiederholung

Determinantenformen

Definition 27.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Eine alternierende Multilinearform $\Delta \in \operatorname{Mult}(V^n; K)$

$$\Delta \colon V^n \ni (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mult}(V^n; K) & \cong & V^{*\otimes n} \\ \text{Unterraum der alternie-} & & \\ \text{renden Multilinearformen} & \cong & V^{*\otimes n}_{\text{alt}} \end{array}$$

Gestalt von Determinantenformen

Satz 27.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \dots, b_n)$ und $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ die zugehörige duale Basis.

1. Die Determinantenformen Δ auf V sind genau die Tensoren in $V^{*\otimes n}$ der Gestalt
$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, b^*_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes b^*_{\sigma(n)}$$
Die Zuordnung $V^{*\otimes n}_{\text{alt}} \ni \Delta \mapsto \alpha \in K$ ist ein Isomorphismus.
2. Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig mit $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i$, dann gilt
$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ von A.
2. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.
3. $\det(A B) = \det(A) \det(B)$.
4. $\det(I) = 1$.
5. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$ $\Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.
6. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.
7. $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A)$.

$$\det(D_i(\alpha)) = \alpha, \quad \det(S_{i,j}(\alpha)) = 1, \quad \det(T_{i,j}) = -1$$

Minor/Unterdeterminante

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Der **Minor** oder die **Unterdeterminante** von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

$$[A]_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

die Determinante eines Endomorphismus

Definition 27.21

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit der Basis B_V. Die **Determinante** von $f \in \operatorname{Endo}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) \coloneqq \det(A)$$

mit $A = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V \leftarrow \widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V \leftarrow B_V} \, \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) \, \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$.

Lemma 27.22 — vgl. Lemma 27.8

1. $\det(f)$ ist eine alternierende Multilinearform auf $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.
2. $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
4. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.
5. $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist linear unabhängig
6. $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
7. $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \operatorname{Endo}(V^*)$.

Orientierung in Vektorräumen

Es sei V ein endl.-dim.Vektorraum über dem geordneten Körper K.

Definition 27.23

Ein Automorphismus $f \in \text{Auto}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$
- **orientierungsumkehrend** im Fall $\det(f) < 0$

Definition 27.25

1. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsm. $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
2. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsm. $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

Lemma 27.26

Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation auf der Menge aller V-Basen.

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. $\det(\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal},\, n>0}) = 0 \Leftrightarrow \text{Defekt}(f) > 0$
2. $\det\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$ besitzt zweidimensionalen Lösungsraum
3. $\det(ABC) = \det(BCA)$ sofern beide Produkte definiert sind
4. $\det(P_\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$.
5. Sind f und g orientierungsumkehrend, dann ist dies auch $f \circ g$.

Basics zur Determinanten

Determinante als Werkzeug

Wofür können wir die Determinante nutzen?

Warum nicht direkt diese Definition?

Definition 27.5

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Determinante** (englisch: determinant) einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist definiert durch

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Mehr zu Determinantenformen

Determinante von Blocktridiagonalmatrizen

Lemma 27.9

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt
$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$
2. Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$
dann gilt
$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Lemma

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem sei Δ eine Determinantenform auf V und $f \in \mathrm{Endo}(V)$. Dann gilt

$$\Delta(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det(f)\Delta(v_1, \ldots, v_n)$$

für alle $(v_1, \ldots, v_n)$.

Interpretation der Determinante

Volumen von Parallelotopen

Bemerkung

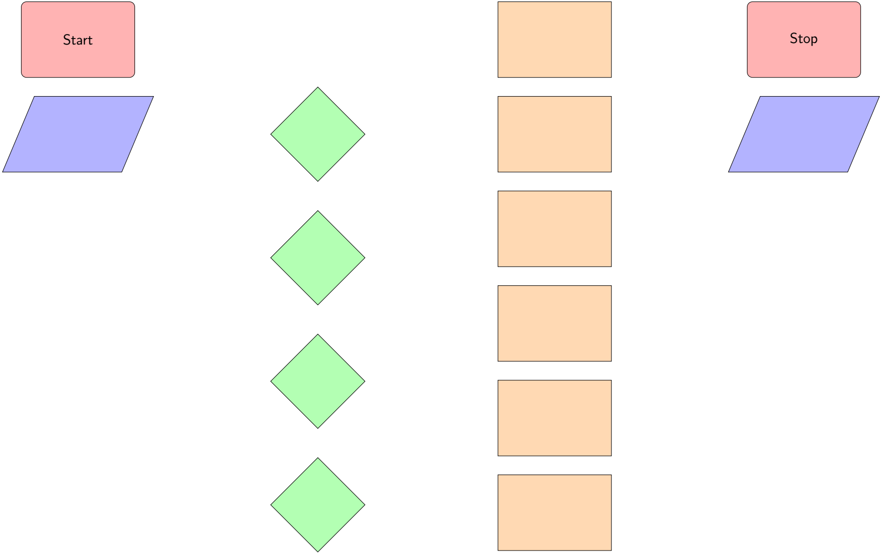
Man hört/liest häufig: Die Determinante liefert „den Flächeninhalt eines von Vektoren aufgespannten Parallelograms“.

Spiegelungen und die Determinante

Warum eigentlich Orientierung von Vektorräumen?

Berechnung der Determinante

Flowchart (Programmablaufplan) Determinantenberechnung



Beispiel Determinantenberechnung

Beispiel

Es ist

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 10 & 9 & 11 \\ 3 & 6 & 6 & 11 & 7 & 10 \\ 4 & 8 & 11 & 17 & 11 & 14 \\ 5 & 10 & 10 & 17 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 10 & 17 & 12 & 18 \end{bmatrix}\right) =$$

Satz von Binet-Cauchy

Satz

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times m}$ sowie $B \in K^{m \times n}$, dann gilt

$$\det(A\,B) = \sum_{W \subseteq [\![1,m]\!],\, \#W = n} \det(A_W)\det(B_W)$$

wobei A_W und B_W Spalten-/Zeilenauswahlmatrizen zu A und B sind.

Beispiel zum Satz von Binet-Cauchy

Beispiel

Es ist

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) =$$

Tipps und Tricks

Anwendung der Adjunkten

Aufgabe

Bestimmen Sie eine vollbesetzte ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit ganzzahliger Inversen A^{-1}.