

Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 05













Link zu diesen Folien

Welche Fragen oder Anregungen zur Veranstaltung haben Sie?

Wir haben uns gefragt, was Sie (Herr Herzog und Herr Müller) so für Musik hören? Reines Interesse, LG

(Anonym – 28.04.2026 10:27:52)

Tastebreaker-Quiz (5 Titel je Dozent)

-  **Numb**
Linkin Park
-  **Schifoan**
Wolfgang Ambros
-  **Squander - Live and Acoustic**
Skunk Anansie
-  **I Miss the Misery**
Halestorm
-  **Buffalo**
Connor Price, Nic D
-  **#41 - Live at Continental Airlines Arena, East Rutherford, NJ - September 1999**
Dave Matthews Band
-  **Zistig**
Jule X, Lil Bruzy
-  **Ich will mehr - Unplugged / Remastered 2016**
Herbert Grönemeyer
-  **Empire State Of Mind**
JAÿ-Z, Alicia Keys
-  **Beer Garden Baby**
Tyler Halverson, Parker McCollum



[Playlist auf Spotify](#)

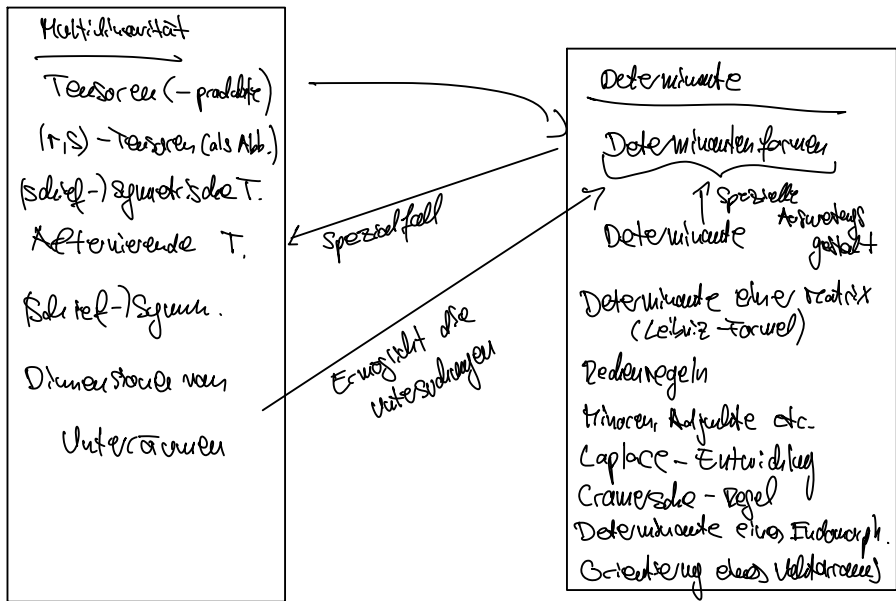


[Antwortformular](#)

Das heutige Programm

- 1 Wochenüberblick
- 2 Wochenwiederholung in wenigen Folien:
 - 1 Determinatenformen
 - 2 Determinante
 - 3 Minoren, Adjunkte etc
 - 4 Determinante von Endomorphismen
 - 5 Orientierung in Vektorräumen
- 3 Kurzquiz
- 4 Der „Abstecher“ über Determinantenformen
- 5 Interpretation - Volumen von Parallelotopen, Orientierung
- 6 Flowchart zur Determinantenberechnung
- 7 Satz von Binet-Cauchy
- 8 Ganzzahlige Matrizen mit ganzzahliger Inversen

Wochenüberblick



Wochenwiederholung

Determinantenformen

Definition 27.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Eine alternierende Multilinearform $\Delta \in \text{Mult}(V^n, K)$

*l. a.
die Eingangsreife
wird erlaubt*

$$\Delta: V^n \ni (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V .

$$\text{Mult}(V^n; K) \cong V^{*\otimes n}$$

Unterraum der alternierenden Multilinearformen

$$\cong V_{\text{alt}}^{*\otimes n}$$

Wtr $r=n$

$$\dim = \binom{n}{n} = \binom{n}{n} = 1$$

$\{\alpha \cdot \Delta \mid \alpha \in K\}$

1 Freiheitsgrad

Gestalt von Determinantenformen

Satz 27.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis (b_1, \dots, b_n) und (b_1^*, \dots, b_n^*) die zugehörige duale Basis.

- Die Determinantenformen Δ auf V sind genau die Tensoren in $V^{*\otimes n}$ der Gestalt

$$\Delta = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) b_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes b_{\sigma(n)}^*$$

Handwritten notes:
 $\alpha \in K$
 $\sigma \in S_n \in \{+1, -1\} \in K$
 $V^{*\otimes n}_{\text{alt}}$
 \leftarrow über Hypermatrizen

Die Zuordnung $V^{*\otimes n}_{\text{alt}} \ni \Delta \mapsto \alpha \in K$ ist ein Isomorphismus.

- Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig mit $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$, dann gilt
- Handwritten notes:*
alt. Schreibsystem.
 $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow$ Matrizen

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

Handwritten notes:
 $=: \det(A)$
Produkt
 \leftarrow α über Körper

Eigenschaften der Determinante

Lemma 27.8

Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

✓ ① $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ von A .

✓ ② $\det(\alpha A) = \underline{\alpha^n} \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.

③ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. ⚠

④ $\det(I) = 1$.

⑤ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$
 $\Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.

Invertierbarkeitskriterium

⑥ $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.

⑦ $\det(A^T) = \det(A)$. \leftarrow *Spalten-/Zeilenverhalten gleich*

$$\det(D_i(\alpha)) = \alpha, \quad \det(S_{i,j}(\alpha)) = 1, \quad \det(T_{i,j}) = -1$$

Minor/Unterdeterminante

Definition 27.12

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ② Der **Minor** oder die **Unterdeterminante** von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

Kofaktormatrix

$$\left[(-1)^{i+j} [A]_{ij} \right] := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

\downarrow

$\left[(-1)^{i+j} [A]_{ji} \right]$ Adjunkte $\text{adj}_j^i(A)$

Streichungsmatrix bzgl. $(i, j) \in \leftarrow^{(k-1) \times (k-1)}$
Minor bzgl. (i, j)

$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$

die Determinante eines Endomorphismus

Definition 27.21

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit der Basis B_V . Die **Determinante** von $f \in \text{Endo}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(\hat{A})$$

mit $\hat{A} = \mathcal{M}_{\hat{B}_V \leftarrow \hat{B}_V}(f) = \underbrace{T_{\hat{B}_V \leftarrow B_V}^{-1}}_{\det(T^{-1})} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)}_{\det(f)} \cdot \underbrace{T_{B_V \leftarrow \hat{B}_V}}_T \cdot (\text{Basistausch})$

Handwritten notes: $\det(T^{-1}) \cdot \det(f) \cdot \det(T) = 1$

Lemma 27.22

vgl. Lemma 27.8

- 1 $\det(f)$ ist eine alternierende Multilinearform auf $(f(v_1), \dots, f(v_n))$.
- 2 $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
- 3 $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- 4 $\det(\text{id}_V) = 1$.
- 5 $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(f) = n \Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ ist linear unabhängig
- 6 $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
- 7 $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \text{Endo}(V^*)$.

Orientierung in Vektorräumen

Es sei V ein endl.-dim.Vektorraum über dem geordneten Körper K .

Definition 27.23

Ein Automorphismus $f \in \text{Auto}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$
 - **orientierungsumkehrend** im Fall $\det(f) < 0$
- } 2 Klassen

Definition 27.25

- 1 Zwei Basen B_V und \hat{B}_V heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsm. $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \hat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
- 2 Zwei Basen B_V und \hat{B}_V heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsm. $T = \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \hat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

Lemma 27.26

Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation auf der Menge aller V -Basen.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?



<https://partici.fi/06765060>

- Existenz*
- ✓ ① $\det(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal, } n > 0}) = 0 \Leftrightarrow \text{Defekt}(f) > 0$
 $\det(f)^n = 0 \Leftrightarrow \det(f) = 0$
- ✗ ② $\det \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$ besitzt
 zweidimensionalen Lösungsraum *im (x, y)*
1-dim $[A] [B] [C]$
- ✗ ③ $\det(ABC) = \det(BCA)$ sofern beide
 Produkte definiert sind $C = I_2$
 $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \neq 2 = \det(2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- ✓ ④ $\det(P_\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$.
 $E = \text{do}(V^{\otimes r})$ $\text{Dunst. - Not. : see / Co. / Witz form.$
- ✗ ⑤ Sind f und g orientierungsumkehrend,
 dann ist dies auch $f \circ g$. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
 $\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$

Basics zur Determinanten

Determinante als Werkzeug

Wofür können wir die Determinante nutzen?

- Basise
- Prüfen lin. Unabhängigkeit ($\{v_1, \dots, v_n\}$ l. u. $\Leftrightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$)
 - Invertierbarkeit prüfen ($A \neq$ invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$)
 - Cramersche Regel liefert Komp von Lösungen zu CAS
 - Vollkreuzmatrix invertieren (Det. von Trafo-matrizen)

Zusätzlich:

- Eigenwerte untersuchen

In der Analysis:

- "Verzerrungen messen"

Trafo von Integrationsbereichen

$$\int_{T(\Omega)} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \circ T \, |\det(T')| \, d\mu$$

Warum nicht direkt diese Definition?

Definition 27.5

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Determinante** (englisch: **determinant**) einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist definiert durch

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \underbrace{a_{\sigma(1),1}} \cdots \underbrace{a_{\sigma(n),n}}.$$

(Handwritten red checkmarks are placed under the terms in the product: one under the sum index, one under the sign, and one under the product terms.)

Essentielle Eigenschaften der Det

- Multiplizierbarkeit
- Alternierendkeitsgeschr.
- "Eindeutigkeit"?

Mehr zu Determinantenformen

Determinante von Blocktridiagonalmatrizen

Lemma 27.9

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- ① Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

- ② Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} \overset{n_1}{\boxed{A_{11}}} & A_{12} \\ 0 & \underset{n_2}{\boxed{A_{22}}} \end{bmatrix}, n_2$$

dann gilt

A vollrang $\Leftrightarrow A_{11}, A_{22}$ Vollrang

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Def.: $\Delta(\tilde{A}) := \det \begin{pmatrix} \tilde{A} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ n_1 -lineare, altern. Multilinearformen (DF)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(A_{11}) &= \det(A_{11}) \cdot \Delta(I_{n_1}) = \det(A_{11}) \cdot \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\det \tilde{A}(A_{22})} \Delta(A_{22}) \text{ (DF)} \\ &= \det(A_{11}) \det(A_{22}) = \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \leftarrow 1 \end{aligned}$$

Determinantenformen und Endomorphismen

Lemma

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.
Außerdem sei Δ eine Determinantenform auf V und $f \in \text{Endo}(V)$.

Dann gilt

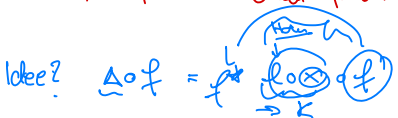
$$\frac{\Delta(f(v_1), \dots, f(v_n))}{\text{DF}_K(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\det(f) \Delta(v_1, \dots, v_n)}{\text{DF}_K(v_1, \dots, v_n)}$$

für alle (v_1, \dots, v_n) .

Beweis Sei: $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V und $\Delta \in \text{Alt}(V^n; K)$ eine DF.

$$\begin{aligned} \Delta(f(b_1), \dots, f(b_n)) &= \det(M_{B \leftarrow B}(f)) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \det(f) \Delta(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

DFen sind auf einem (wechselwirkenden) Palet übereinstimmend gleich, der $\det(V_{\text{alt}}^{\text{er}}) = 1$.

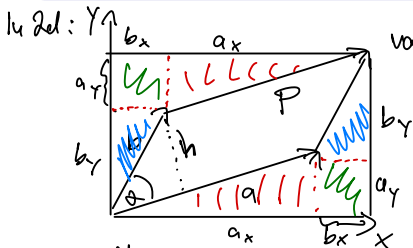


Interpretation der Determinante

Volumen von Parallelotopen

Bemerkung

Man hört/liest häufig: Die Determinante liefert „den Flächeninhalt eines von Vektoren aufgespannten Parallelogramms“ *↳ oder mit parallelen Seiten ohne Schnittpunkte*



$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P) &= |a| \cdot h = |a| |b| \sin(\alpha) \\ &= a_x b_y - b_x a_y = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \\ &= (a_x + b_x) \cdot (a_y + b_y) - 2 \frac{a_x b_y}{2} - 2 \frac{b_x a_y}{2} - 2 a_y b_x \end{aligned}$$

Bessere Sichtweise:

Parallelotop ist aff. line. Transform. eines Einheitswürfels

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, 1]\}$$

$$\text{also } P = T(W) = \gamma + MW$$

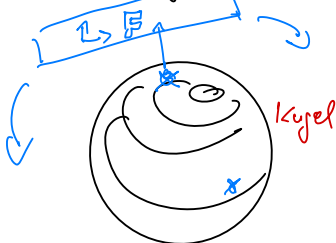
versch. Verzerrung

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \int_P 1 \, d\mu = \int_W \underbrace{1 \circ (\gamma + Mw)}_1 |\det(M)| \, d\mu(w) \\ T(w) &= \underline{\underline{|\det(M)|}} \underbrace{\text{vol}(W)}_1 \end{aligned}$$

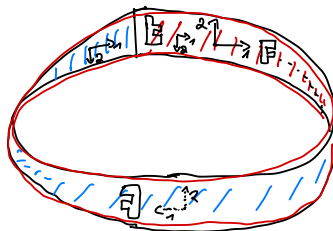
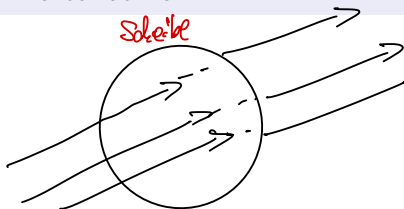
Spiegelungen und die Determinante

Warum eigentlich Orientierung von Vektorräumen?

Motivation: Physik, Flussintegrale



Schleife

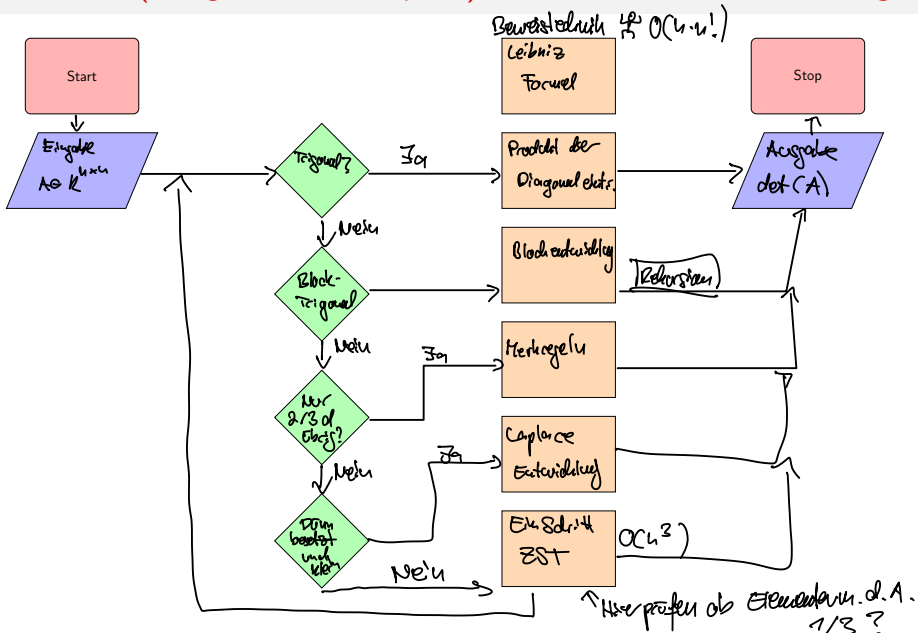


$\det(T_{\vec{v} \leftarrow \vec{b}_V})$
 $\det(V \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \end{pmatrix}) V^{-1}$
 $\det(V) \det(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \det(V^{-1})$
 $\det(V) \det(1) \det(V^{-1})$
 $\det(V) \det(V^{-1})$
 $\det(V) \det(V^{-1}) = 1$
 2 Spiegelungen sind als Rotation darstellbar
 $(1,2) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,2,3)$

Berechnung der Determinante

(persönlich)

Flowchart (Programmablaufplan) Determinantenberechnung



Beispiel Determinantenberechnung

Beispiel

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 10 & 9 & 11 \\ 3 & 6 & 6 & 11 & 7 & 10 \\ 4 & 8 & 11 & 17 & 11 & 14 \\ 5 & 10 & 10 & 17 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 10 & 17 & 12 & 18 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \stackrel{ZS}{=} \det \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{ZS}{=} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_2 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{-6} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}}_2 = -24$$

Satz von Binet-Cauchy (verallg. der Produktformel)

Satz

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times m}$ sowie $B \in K^{m \times n}$, dann gilt

$$\det(AB) = \sum_{\substack{W \subseteq [1, m], \#W=n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m}} \det(A_W) \det(B_W)$$

$\det(A_W \cdot B_W)$
produkt erhalten!

wobei A_W und B_W Spalten-/Zeilenauswahlmatrizen zu A und B sind.

Bew.: Setze $\Delta \in \mathbb{K}^{n \times n}$ alt mit $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \Delta((AB)_1, \dots, (AB)_n) = \Delta(A_1 B_1, \dots, A_n B_n) \\ &= \Delta(A(B_1), \dots, A(B_n)) = \Delta\left(A \sum_{i=1}^m B_{i1} e_i, \dots, A \sum_{i=1}^m B_{in} e_i\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m B_{i_1 1} \dots B_{i_n n} \Delta(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n \in S_n} \underbrace{B_{i_1 1} \dots B_{i_n n}}_{\det(B_W)} \underbrace{\Delta(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n})}_{\det(A_W)} \end{aligned}$$

□

Beispiel zum Satz von Binet-Cauchy

Beispiel

Es ist

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{array} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \right) = -1$$

$$\begin{array}{ccccccc} d \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right) & d \left(\begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right) & + & d \left(\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right) & d \left(\begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) & + & d \left(\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right) d \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) = -1 \\ 0 & & & 1 & -1 & & 0 \end{array}$$

Tipps und Tricks

Anwendung der Adjunkten

Aufgabe

Bestimmen Sie eine vollbesetzte ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit ganzzahliger Inversen A^{-1} . (nice trick)

Hilfssatz beim Erstellen von \bar{A} : $A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$
 (ganzzahlig) \uparrow (ganzzahlig) \uparrow (ganzzahlig?) \uparrow (ganzzahlig?)

HA: A, A^{-1} ganzzahlig $\Leftrightarrow A$ ganzzahlig und $\det(A) \in \{\pm 1\}$ (über Adjunkte)

• Zeilen-/Spaltenstufen zücken um dies herzustellen

Vorgehen: Start mit Triangulierung mit $\det \in \{\pm 1\}$ und modifiziere via Z/S tausch

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 + 2C_2 \\ C_3 + 2C_2}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det = 1 \quad \rightarrow \quad \det = 1 \quad \xrightarrow{(-1)^3} \quad \det = -1 \quad \rightarrow \quad \det = 1 \uparrow$$

iw $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$