Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 04

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in wenigen Folien:
   1. Mehrstufiges Tensorprodukt
   2. Analoge Resultate wie im zweistufigen Fall
   3. Tensoren über einem Vektorraum
   4. (Schief-)symmetrie
3. Kurzquiz
4. Tensorrang und Matrixrang
5. Rangdarstellung und lineare Abhängigkeit
6. Parallele vs. Sequentielle Tensorierung
7. Tensoren als (multi-)lineare Abbildung

Wochenüberblick

Wochenwiederholung

$$\begin{tikzcd} \bigtimes_{k=1}^{N} V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^{N} V_k \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Definition 24.1 — vgl. Definition 23.1

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ sowie W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $m\colon \bigtimes_{k=1}^{N} V_k = V_1 \times \cdots \times V_N \to W$ heißt **multilinear**, wenn sie in jedem Eingang linear ist.

Definition 24.5 — vgl. Definition 23.6

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K. Weiter seien $\bigotimes_{k=1}^{N} V_k$ ein K-Vektorraum und $\otimes\colon \bigtimes_{k=1}^{N} V_k \to \bigotimes_{k=1}^{N} V_k$ N-linear. Das Paar $(\bigotimes_{k=1}^{N} V_k, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von $V_1, \ldots, V_N$, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für jede N-lineare Abbildung $m\colon \bigtimes_{k=1}^{N} V_k \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(\bigotimes_{k=1}^{N} V_k, W)$ mit $m = f \circ \otimes$.

Analoge Resultate wie im zweiachsigen Fall

Es übertragen sich analog:

1. Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie
2. Erzeugendensysteme und Basiseigenschaften
3. Rang*definition*
4. Rang von Elementartensoren
5. Tensorprodukt von Homomorphismen
6. Darstellung als Komponenten*hyper*matrizen
7. Duales Tensorprodukt
8. Interpretation als lineare Abbildungen

Tensoren über einem Vektorraum

Definition 25.1

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Für $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ heißt

$$\mathcal{T}^{(r,s)}(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

der **Tensorproduktraum vom Typ (r, s) über dem Vektorraum V**.

Definition 26.1

Es seien V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_r$ eine Permutation auf $[\![1, r]\!]$.

Dann heißt die durch $P_\sigma \colon \begin{cases} V^{\otimes r} \to V^{\otimes r} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \end{cases}$
eindeutig definierte lineare Abbildung die **durch σ induzierte Permutationsabbildung** auf $V^{\otimes r}$.

(Schief-)symmetrie

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$. Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt

1. **(total) symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = t$$

2. **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, t$$

3. **(total) alternierend**, wenn für alle $v^1, \dots, v^r \in V^*$ gilt:

$$v^i = v^j \text{ für ein } i \neq j \quad \Rightarrow \quad t(v^1, \dots, v^r) = 0$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} V^{\otimes r}_{\text{sym}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist symmetrisch}\} \\ V^{\otimes r}_{\text{skew}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist schiefsymmetrisch}\} \\ V^{\otimes r}_{\text{alt}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist alternierend}\} \end{aligned}$$

Lemma 26.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}} = V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}$.
2. $V^{\otimes r}_{\text{alt}} \subseteq V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
3. Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt sogar $V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
4. Im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.
5. $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$, $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ und $V^{\otimes r}_{\text{alt}}$ sind Unterräume von $V^{\otimes r}$.

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) = 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Die folgenden Abbildungen sind Endomorphismen

1. Die **Symmetrisierung**

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Sym}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{sym}} \subseteq V^{\otimes r}$$

   .

   Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Sym}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ ist.

2. Die **Schiefsymmetrisierung**

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Skew}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{skew}} \subseteq V^{\otimes r}$$

   Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Skew}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ist.

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. In $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ existieren Tensoren vom Rang 3.
2. Die Räume $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ und $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ sind nie gleich.
3. Es gibt symmetrische Elementartensoren.
4. Alternierende Tensoren der Stufe 3 haben mindestens Rang 2.

Tensorrang

Rang von Tensoren vs Rang von Matrizen

Definition 15.14

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

Satz 23.38

[...] Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n\times m}$ bzgl. der Basis $B_{U\otimes V}$:

$$\mathrm{Rang}(t) = \mathrm{Rang}(A)$$

Zusammenhang Rang von Tensoren und Rang von Matrizen

Definition 15.14

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

Rangdarstellungen und lineare Abhängigkeit

Hausaufgabe II-3.3

Es seien $n \in \mathbb{N}$, U und V zwei K-Vektorräume sowie $t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ für Familien $(u_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ und $(v_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ aus U bzw. V.
Zeigen Sie: Der Rang von t ist genau dann n, wenn $(u_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ und $(v_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ linear unabhängige Familien von Vektoren in U bzw. V sind.

Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

Parallele vs. Sequentielle Tensorierung

Parallele vs. Sequentielle Tensorierung

Hausaufgabe II-4.2

Es seien U, V, W K-Vektorräume. Weiterhin sei

$$I\colon U \otimes V \otimes W \ni u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W \qquad (*)$$

2. Zeigen Sie, Trilinearität von $f := (U \times V \times W) \ni (u, v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$.
3. Zeigen Sie, dass $(*)$ einen Vektorraum-Isomorphismus definiert.
4. Zeigen Sie, dass $(*)$ keinen Tensorprodukt-Isomorphismus definiert.

Parallele vs. Sequentielle Tensorierung

Rang des W-Zustands

Gegeben sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Der Rang des Tensors

$$e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$$

ist

Tensoren als Lineare Abbildungen

Welche Tensorkombinationen kann man „auswerten“?

Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^2$ und

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$$

$$u^* := \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 1x + 2y \right) \in U^*, \quad v^* := 0 \in V^*.$$

Beispiel 24.24 — $\mathrm{id}\colon K^{n\times m} \to K^{n\times m}$

1. Wir identifizieren $K^{n\times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\mathrm{id}\colon K^n \otimes K^m \to K^n \otimes K^m \quad \cong \quad (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes K^n \otimes K^m$$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$a_{ijk\ell} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell \, , e_i \otimes e_j \rangle = \delta_{ik} \, \delta_{j\ell}$$

Tensorkomponenten und Bildkomponenten

Ist $t \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ mit

$$t = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n,$$

dann ist

Tensordarstellung von Abbildungen zwischen Matrixräumen

Beispiel 24.24 — $\mathrm{id}\colon K^{n\times m} \to K^{n\times m}$

1. Wir identifizieren $K^{n\times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\mathrm{id}\colon K^n \otimes K^m \to K^n \otimes K^m \quad \cong \quad (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes K^n \otimes K^m$$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$a_{ijk\ell} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell \,,\, e_i \otimes e_j \rangle = \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}$$

(Schief-)Symmetrische Tensoren

Beispiel für (Schief-)symmetrische Tensoren

Es sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (jeweils über $\mathbb{R}$) durch seine Komponenten bzgl. der kanonischen Basis-Tensoren dargestellt. Wie sehen die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren aus?