Plenarübung Lineare Algebra II

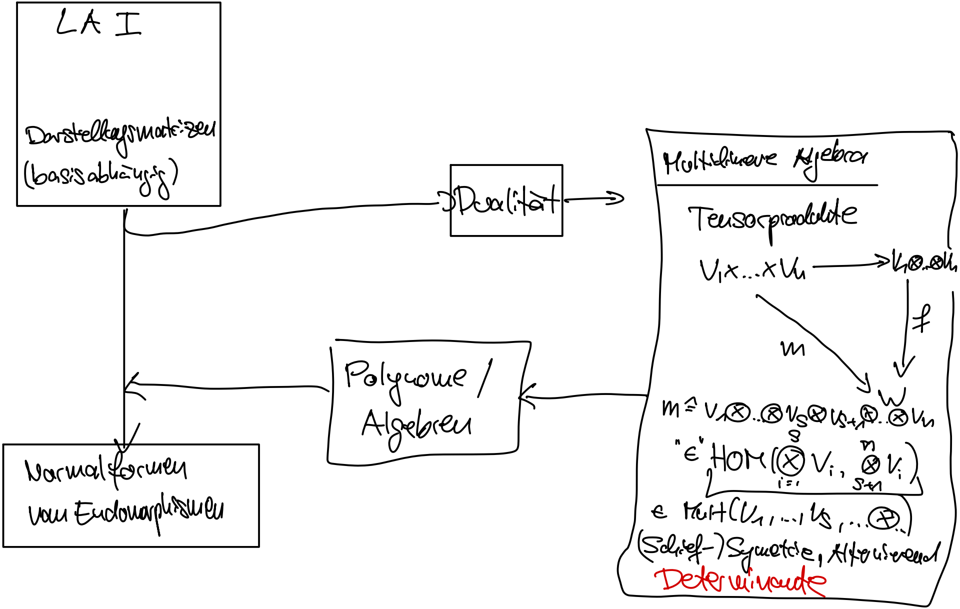
(Inhalts)-Woche 04

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in wenigen Folien:
    1. Mehrstufiges Tensorprodukt
    2. Analoge Resultate wie im zweistufigen Fall
    3. Tensoren über einem Vektorraum
    4. (Schief-)symmetrie
3. Kurzquiz
4. Tensorrang und Matrixrang
5. Rangdarstellung und lineare Abhängigkeit
6. Parallele vs. Sequentielle Tensorierung
7. Tensoren als (multi-)lineare Abbildung

Wochenüberblick



Wochenwiederholung

Multilinearität und Tensorprodukt

$$\begin{tikzcd} \bigtimes_{k=1}^N V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & \bigotimes_{k=1}^N V_k \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Definition 24.1 — vgl. Definition 23.1

Es seien $V_1, \dots, V_N$ sowie W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $m\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k = V_1 \times \dots \times V_N \to W$ heißt **multilinear**, wenn sie in jedem Eingang linear ist. ← Alle bis auf den Eingang belegt.

Definition 24.5 — vgl. Definition 23.6

Es seien $V_1, \dots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K. Weiter seien $\bigotimes_{k=1}^N V_k$ ein K-Vektorraum und $\otimes\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to \bigotimes_{k=1}^N V_k$ N-linear. Das Paar $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von $V_1, \dots, V_N$, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für jede N-lineare Abbildung $m\colon \bigtimes_{k=1}^N V_k \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, W)$ mit $m = f \circ \otimes$.

Analoge Resultate wie im zweiachsigen Fall

Es übertragen sich analog:

1. Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie

   ⇝ Uns genügen die Eigenschaften. Konstruktion überträgt ⇝ Kon $V_1 \times \dots \times V_n \,/\, \langle E \rangle$

   "Multilinearität"

2. Erzeugendensysteme und Basiseigenschaften

   $\{ v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mid v_i \in V_i \}$ $\quad (b_{1 i_1} \otimes \dots \otimes b_{n i_n})_{(i_1, \dots, i_n)}$

3. Rang*definition*

   minimal? $\sum_{i=1}^{r} a_i v_{1i} \otimes \dots \otimes v_{ni} = t$ $\quad$ i.A. (deutlich) schwieriger als im zweiachsigen Fall

4. Rang von Elementartensoren

   analog

5. Tensorprodukt von Homomorphismen

   analog $\quad f_1 \boxtimes \dots \boxtimes f_n (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_n(v_n)$

6. Darstellung als Komponenten*hyper*matrizen

   $t \mathrel{\hat=} a_{i_1 \dots i_n}$ $\quad$ KHM tragen Ranginformationen

7. Duales Tensorprodukt

   analog

8. Interpretation als lineare Abbildungen

   stellen Tensoren als Homom. dar

Tensoren über einem Vektorraum

Definition 25.1 (Wir arbeiten zukünftig nur mit endlichdimensionalen V/V^*)

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Für $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ heißt

$$\mathcal{T}^{(r,s)}(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

der **Tensorproduktraum vom Typ (r, s) über dem Vektorraum V**.

Definition 26.1 Ermöglicht durch gleiche Räume im Tensorprodukt

Es seien V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_r$ eine Permutation auf $[\![1, r]\!]$.

Dann heißt die durch $P_\sigma : \begin{cases} V^{\otimes r} \to V^{\otimes r} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \end{cases}$

eindeutig definierte lineare Abbildung die **durch σ induzierte Permutationsabbildung** auf $V^{\otimes r}$. $P_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(v^1 \otimes \ldots \otimes v^n) = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(v^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v^{\sigma(n)})$

(Schief-)symmetrie

Definition 26.3

Es seien V ein Vektorraum und $r \in \mathbb{N}_0$. Ein Tensor $t \in V^{\otimes r}$ heißt

1. **(total) symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$\boxed{P_\sigma(t) = t}$$

Vertauschung von Eingängen wird nicht bemerkt.

2. **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$P_\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, t$$

Vertauschen von Eingängen wird bemerkt und gezählt

3. **(total) alternierend**, wenn für alle $v^1, \ldots, v^r \in V^*$ gilt:

$$v^i = v^j \text{ für ein } i \neq j \quad \Rightarrow \quad t(v^1, \ldots, v^r) = 0$$

Mehrfachbelegte Eingänge werden bemerkt $\Longleftrightarrow$ lin. abhängigkeit wird bemerkt

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} V^{\otimes r}_{\text{sym}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist symmetrisch}\} \\ V^{\otimes r}_{\text{skew}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist schiefsymmetrisch}\} \\ V^{\otimes r}_{\text{alt}} &:= \{t \in V^{\otimes r} \mid t \text{ ist alternierend}\} \end{aligned}\right\} \text{Unterräume}$$

Zusammenhang zwischen den Symmetrie-Eigenschaften

Lemma 26.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Im Fall $\underbrace{r = 0 \text{ und } r = 1}_{\text{höchstens einen Eingang}}$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}} = V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}$.
2. $V^{\otimes r}_{\text{alt}} \subseteq V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.

   Skew

   Alt

   char $\neq 2$
3. Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt sogar $V^{\otimes r}_{\text{alt}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.

   Alt=Skew Sym

   0
4. Im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt $V^{\otimes r}_{\text{sym}} = V^{\otimes r}_{\text{skew}}$.

   Alt Skew =Sym
5. $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$, $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ und $V^{\otimes r}_{\text{alt}}$ sind Unterräume von $V^{\otimes r}$.

Satz 26.10

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\underline{\operatorname{char}(K) = 0}$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Die folgenden Abbildungen sind Endomorphismen

1. Die **Symmetrisierung**

$$\underline{V^{\otimes r}} \ni t \mapsto \operatorname{Sym}(t) := \frac{1}{r!} \underbrace{\sum_{\sigma \in S_r}}_{\text{Alle Perm}} P_\sigma(t) \in \underbrace{V^{\otimes r}_{\text{sym}}}_{\text{Homo}} \subseteq \underbrace{V^{\otimes r}}_{\text{End.}}$$

Mittelung (char $\neq 0$)

.

Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Sym}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ ist.

$t - \operatorname{Sym}(t) = 0 \Leftrightarrow t \in V^{\otimes r}_{\text{sym}}$

2. Die **Schiefsymmetrisierung**

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Skew}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \underbrace{(\operatorname{sgn} \sigma)}_{\text{Vorzeichengewichtete}} P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{skew}} \subseteq V^{\otimes r}$$

Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Skew}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ist.

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. ✓ In $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ existieren Tensoren vom Rang 3.
   W-State, folgt noch
2. ✗ Die Räume $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ und $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ sind nie gleich. $\mathrm{char}(K)=2$
3. ✓ Es gibt symmetrische Elementartensoren.
   $v \otimes \dots \otimes v$
4. ✗ Alternierende Tensoren der Stufe 3 haben mindestens Rang 2.
   Nulltensor $0 \otimes 0 \otimes 0$

Tensorrang

Rang von Tensoren vs Rang von Matrizen

Definition 15.14 LAT

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

Dim(SRaum(A)) $= \dim(\langle a_{\cdot i}, i \in 1,..,n \rangle)$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

min?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

$\boxed{\text{Satz 23.38}}$

[...] Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n\times m}$ bzgl. der Basis $B_{U\otimes V}$:

$$\mathrm{Rang}(t) = \mathrm{Rang}(A)$$

Definition 15.14

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

min r s.d.:

$A = [B][C]\}r$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

$\sum_{k=1}^{r} b_{ik} c_{kj}$

$(\sum x_i u_i) \otimes (\sum y_j v_j)$

$= \sum_{i,j} x_i y_j (u_i \otimes v_j)$

$x y^T$

Erinnerung Blockmatrixmultiplikation

$b_{\cdot 1} c_{1 \cdot}$

$[\ldots] + [\ldots] + \ldots$

Hausaufgabe II-3.3

Achtung: 2-Achtung!

Es seien $n \in \mathbb{N}$, U und V zwei K-Vektorräume sowie $t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ für Familien $(u_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ und $(v_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ aus U bzw. V.

Zeigen Sie: Der Rang von t ist genau dann n, wenn $(u_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ und $(v_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ linear unabhängige Familien von Vektoren in U bzw. V sind.

„$\Rightarrow$" Angen. (u_i) lin. abh. mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ also $u_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i$

Dann ist $t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i = u_1 \otimes v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i = \left(-\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i\right) \otimes v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i$

$= -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i \otimes v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i = \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right) v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i$ $\otimes w_i$ $\otimes w_1$

$= \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes \left(v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} v_1\right) \Rightarrow \text{Rang} < n$

Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

$\mathrm{Rang}(t) = \mathrm{Rang}(A)$

Komponentenmatrix

Von dieser lässt sich per ZST eine Rangfakt bestimmen

Hier

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (1\,0\,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\,2\,0) \Rightarrow t = (u_1 + 3u_3) \otimes (v_1 + v_3) + u_2 \otimes 2v_2$$

Wie zuvor liefern dyadische Produkte die Koeffizienten

Parallele vs. Sequentielle Tensorierung

Hausaufgabe II-4.2

Es seien U, V, W K-Vektorräume. Weiterhin sei

$$I\colon U \otimes V \otimes W \ni u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W \qquad (*)$$

2. Zeigen Sie, Trilinearität von
   $f := (U \times V \times W) \ni (u, v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$.
3. Zeigen Sie, dass $(*)$ einen Vektorraum-Isomorphismus definiert.
4. Zeigen Sie, dass $(*)$ keinen Tensorprodukt-Isomorphismus definiert.

(u_1, u_2) (v_1, v_2), (w) lin. unabh. Setze $t = u_1 \otimes v_1 \otimes w + u_2 \otimes v_2 \otimes w$ $\leftarrow$ Rang(2) in $U \otimes V \otimes W$

aber $I(t) = (u_1 \otimes v_1) \otimes w + (u_2 \otimes v_2) \otimes w$

$= (u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2) \otimes w$ $\leftarrow$ Rang 1

Parallele vs. Sequentielle Tensorierung

$$
\begin{tikzcd}
U \times V \times W \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "f \text{ (tril.)}"'] & & U \otimes V \otimes W \arrow[dl, shift left, "I"] \\
& (U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, shift left, "I^{-1}"] & & (U \otimes V) \times W \arrow[ll, "\otimes_{(U \otimes V) W}"] \arrow[ul, "g \text{ bilin}"']
\end{tikzcd}
$$

$(u,v,w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$

$I : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$

$I^{-1} : \left(\sum_i u_i \otimes v_i\right) \otimes w \mapsto \sum_i u_i \otimes v_i \otimes w$

$((U \otimes V) \otimes W, \tilde{\otimes})$

$\tilde{\otimes}(u,v,w) := \underbrace{I \circ \otimes}_{f}(u,v,w) = (u \otimes v) \otimes w$

$\uparrow$ Bew 1

Bew$((u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2) \otimes w) = ?$

Konkret! Was ist ein Elementartensor.

Rang des W-Zustands

Dicker 2

Gegeben sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Der Rang des Tensors

$$e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$$

ist $3 > 2$

Nicht Rang 0: LK von Basisvektoren,

Nicht Rang 1: Sonst $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \otimes (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \otimes (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \, e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \dots$

$\Rightarrow \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = 0$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 = 1$ $\Rightarrow \gamma_1 = 0$ aber $\gamma_1 \neq 0$ ↯

Nicht Rang 2: Angen. $t = a \otimes b \otimes c + x \otimes y \otimes z$. Dann $I(t) = \underbrace{(a \otimes b)}_{\text{Rang } 1} \otimes c + \underbrace{(x \otimes y)}_{\text{Rang } 1} \otimes z$

und aber $I(t) = (e_1 \otimes e_1) \otimes e_2 + (e_1 \otimes e_2) \otimes e_1 + (e_2 \otimes e_1) \otimes e_1$

$= \underbrace{(e_1 \otimes e_1)}_{\text{Rang } 1 \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \otimes e_2 + \underbrace{(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)}_{\text{Rang } 2 \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \otimes e_1$

$f_1 := \mathrm{id} \otimes e_1^*$ / $f_2 := \mathrm{id} \otimes e_2^*$

$\Rightarrow \langle a \otimes b, x \otimes y \rangle \supseteq \{ e_1 \otimes e_1, \underbrace{e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}_{\text{lin. unabh. also Basis}} \}$

$\alpha (e_1 \otimes e_1) + \beta (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ Rang 1 nur für $\beta = 0$

$\Rightarrow \langle e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \rangle = \langle a \otimes b, x \otimes y \rangle \Rightarrow a \otimes b, x \otimes y \in \langle e_1 \otimes e_1 \rangle$ ↯

Tensoren als Lineare Abbildungen

Welche Tensorkombinationen kann man „auswerten“?

Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^2$ und

$$\underline{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \quad \underline{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$$

$$u^* := \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 1x + 2y \right) \in U^*, \quad v^* := 0 \in V^*.$$

$\boxed{\langle u^*, u \rangle = 2}$

$\langle v^*, v \rangle = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Hom}(U^*, V) \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{Hom}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}$$

$\langle \,\cdot\, , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Big|_{u^*} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\langle \,\cdot\, , \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big|_{v^*} = 0$

$\langle \,\cdot\, , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \langle \,\cdot\, , \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \Big|_{u^*, v^*} = 2 \cdot 0 = 0$

Tensordarstellung von Abbildungen zwischen Matrixräumen

Beispiel 24.24 — id: $K^{n\times m} \to K^{n\times m}$

1. Wir identifizieren $K^{n\times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\text{id}\colon K^n \otimes K^m \to K^n \otimes K^m \quad \cong \quad \underbrace{(K^n)^* \otimes (K^m)^*}_{} \otimes K^n \otimes K^m$$

$\in \text{Hom}(K^n \otimes K^m, K^n \otimes K^m)$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$\boxed{a_{ijk\ell}} = \langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell \,, e_i \otimes e_j \rangle = \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

Why?

$\pi_k(e_i) \otimes \pi_\ell(e_j) \hat{=} \pi_k(e_i)\pi_\ell(e_j)$

Tensorkomponenten und Bildkomponenten

Ist $t \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ mit

$$t = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n,$$

dann ist mit $I : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \ni v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto (\ ) \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_s, V_{s+1} \otimes \ldots \otimes V_n)$

$$v^1 \boxtimes \ldots \boxtimes v^n(t) = \langle v^1, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle v^n, v_n \rangle$$

$$= \langle v^1, v_1 \rangle \ldots \langle v^s, v_s \rangle \langle v^{s+1}, v_{s+1} \rangle \ldots \langle v^n, v_n \rangle$$

$$= v^{s+1} \boxtimes \ldots \boxtimes v^n \big(\underbrace{I(t)(v^1, \ldots, v^s)}_{\in \mathrm{Bild}(I(t)) \subseteq \mathrm{Hom}} \big)$$

Beispiel 24.24 $\mathrm{id}\colon K^{n\times m} \to K^{n\times m}$

1. Wir identifizieren $K^{n\times m}$ mit $K^n \otimes K^m$ über den von den Standardbasen induzierten Synthese-Isomorphismus und betrachten

$$\mathrm{id}\colon K^n \otimes K^m \to K^n \otimes K^m \quad \cong \quad (K^n)^* \otimes (K^m)^* \otimes K^n \otimes K^m$$

$$t := I^{-1}(\mathrm{id}) = \sum_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{\ell}} a_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{\ell}}\, \underbrace{e^{\hat{i}}}_{\pi_{\hat{i}}} \otimes \underbrace{e^{\hat{j}}}_{\pi_{\hat{j}}} \otimes e_{\hat{k}} \otimes e_{\hat{\ell}}$$

Wir setzen $e_i \otimes e_j$ in die identische Abbildung ein und ermitteln die Komponenten des Bildes mit Hilfe der Elemente der dualen Basis:

$$e_i \boxtimes e_j \boxtimes \pi_k \boxtimes \pi_\ell (t) \stackrel{?}{=} a_{ijk\ell} = \underbrace{\langle \pi_k \boxtimes \pi_\ell \,,\, e_i \otimes e_j \rangle}_{} = \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

$$\pi_k \boxtimes \pi_\ell \Big(\underbrace{I(t)}_{I(I^{-1}(\mathrm{id})) = \mathrm{id}} (e_i \otimes e_j) \Big)$$

(Schief-)Symmetrische Tensoren

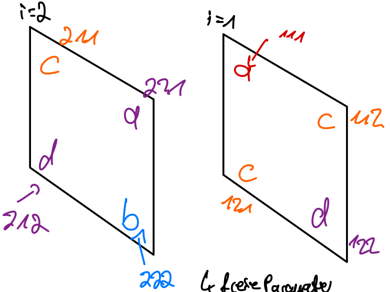
Beispiel für (Schief-)symmetrische Tensoren

Es sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (jeweils über $\mathbb{R}$) durch seine Komponenten bzgl. der kanonischen Basis-Tensoren dargestellt. Wie sehen die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren aus?

$$t = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ijk} (e_i \otimes e_j \otimes e_k)$$

Symm

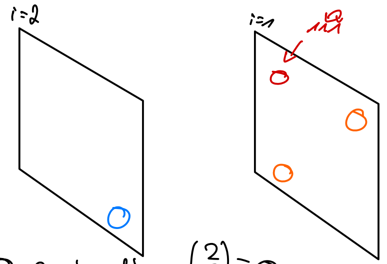
$$a_{ijk} = a_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} \quad \forall \sigma \in S_3$$



4 freie Parameter

Schiefsymm

$$a_{ijk} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$$



$t = 0$ passt $\quad \dim = \binom{2}{3} = 0$