Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 03

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in wenigen Folien:
    1. Erzeugung/Basen in Tensorprodukträumen
    2. Tensorrang
    3. Tensorprodukte linearer Abbildungen
    4. Darstellung von Tensoren (Komponentenmatrizen)
    5. Tensoren als lineare Abbildungen
3. Kurzquiz
4. (Bi-)lineare Überbestimmung auf Erzeugendensystemen
5. Konstruktion von Tensoren
6. Rang von Tensoren vs. Rang von Matrizen
7. Beispiel Rangbestimmung
8. Beispiel Tensoren als lineare Abbildungen

Wochenüberblick

Wochenwiederholung

Erzeugendensystem und Basis

Lemma 23.12

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

Lemma 23.13

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Weiter seien $B_U = (u_i)_{i \in I}$ bzw. $B_V = (v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. V. Dann gilt:

1. $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis von $U \otimes V$.
2. $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$.

Tensorrang

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

Lemma 23.18

Es seien U und V Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Dann gilt:

1. Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
2. Für $u \in U$ und $v \in V$ gilt

$$u \otimes v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \text{ oder } v = 0$$

3. Jeder Elementartensor $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ ist vom Rang 1.

Tensorprodukt linearer Abbildungen

Definition 23.30 und Lemma 23.32

Es seien $f_1 \in \operatorname{Homo}(U_1, V_1)$ und $f_2 \in \operatorname{Homo}(U_2, V_2)$. Dann heißt

$$f_1 \boxtimes f_2 \colon \begin{cases} U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2 \\ u_1 \otimes u_2 \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \end{cases}$$

das **Tensorprodukt** der Abbildungen f_1 und f_2. Ordnen wir die (endlichen) Basen $B_{U_1 \otimes U_2}$ und $B_{V_1 \otimes V_2}$ lexikographisch, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_{V_1 \otimes V_2} \leftarrow B_{U_1 \otimes U_2}}(f_1 \boxtimes f_2) = A \boxtimes B \in K^{(n_1 n_2) \times (m_1 m_2)}$$

mit

$$A \boxtimes B := \begin{bmatrix} a_{11}\, B & a_{12}\, B & \cdots & a_{1 m_1}\, B \\ a_{21}\, B & a_{22}\, B & \cdots & a_{2 m_1}\, B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\, B & a_{n_1 2}\, B & \cdots & a_{n_1 m_1}\, B \end{bmatrix}.$$

Darstellung von Tensoren

Vektorraum V

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \;\cong\; K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j = \Phi_{B_V}(x)$$

Die Koordinaten x_j können mit Hilfe der zu B_V dualen Basis von V^* ermittelt werden.

Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \;\cong\; K^{n\times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ Basen, dann repräsentiert eine Komponentenmatrix $A \in K^{n\times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,(u_i \otimes v_j) = \Phi_{B_{U\otimes V}}(A)$$

Die Komponenten a_{ij} können mit Hilfe der zu $B_{U\otimes V}$ dualen Basis von $(U \otimes V)^*$ ermittelt werden.

Zusammenfassung der kanonischen Isomorphismen

$$
\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Homo}(U^*, V) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Homo}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{Homo}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}
$$

- Ein Tensor in $U \otimes V$ kann an seinen beiden „Eingängen“ Vektoren aus U^* bzw. V^* entgegennehmen.
- Wird ein Eingang mit einem Vektor belegt, so wird er vom Tensor „konsumiert“. Der Faktor entsprechende Faktor in $U \otimes V$ wird dabei „verbraucht“.
- In Komponentendarstellung wird die entsprechende Achse mit dem Koordinatenvektor des anliegenden Vektors **kontrahiert**.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. $U \otimes V \cong V \otimes U$
2. In $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \otimes \mathcal{P}(\{r, g, b\})$ über $\mathbb{Z}_2$ existieren Tensoren vom Rang 5.
3. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ hat Rang 2.
4. $f_1 \boxtimes f_2(u \otimes 0) = 0$
5. Sind f_1 und f_2 injektiv, dann ist $f_1 \boxtimes f_2$ injektiv

Konfliktfreie Überbelegung bei Linearer Fortsetzung auf Tensorprodukträumen

Überbelegung von $\otimes$

Gegeben seien K-Vektorräume U, V und die Vorschrift:

$$f : U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto v \otimes v \in V \otimes V$$

1. Wieviele Bedeutungen des Symbols $\otimes$ sehen wir in der Vorschrift?

2. Definiert die gegebene Vorschrift eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(U \otimes V, V \otimes V)$?

Definition von Homomorphismen über lineare Fortsetzung

Satz 17.10

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in W.

1. Ist $(v_i)_{i \in I}$, dann gibt es ein $f \in \text{Homo}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.
2. Ist $(v_i)_{i \in I}$, dann gibt es genau ein $f \in \text{Homo}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Vermeidet man Konflikte in den Werten, dann darf man f aber sogar auf die Werte vorgeben.

(Über-)definition von Homomorphismen auf Tensorräumen

Häufig beschreiben wir lineare Abbildungen auf Tensorprodukträumen durch ihr Verhalten auf den einfachen Tensoren, also

$$f\colon U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto \quad \dots \quad \in W$$

§ 23.4 Konstruktion eines Tensorprodukts

Übersicht: Tensorproduktkonstruktion

Unser gewünschtes Tensorprodukt

Zu VR U, V, W eine bilineares $\otimes$ mit isomorpher Zuordnung bilinearer b zu eindeutigen linearen f mit $b = f \circ \otimes$ existiert.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "b"'] & U \otimes V \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Wir konstruieren jetzt:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & ? \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & ?\,/\,? \arrow[dl, "\widehat{g}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

freier Vektorraum über einer Menge X

Definition 23.22

Es sei X eine Menge und K ein Körper. Der **freie K-Vektorraum über der Menge X** ist der K-Vektorraum

$$(K^X)_{00} := \{f : X \to K \mid \operatorname{supp} f \text{ ist endlich}\}$$

der endlich getragenen Funktionen $X \to K$.

Basis des freien Vektorraums

Die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ ist eine Basis von $(K^X)_{00}$.

1. Für $X = \emptyset$ und beliebiges K
2. Für $X = \{\top, \bot\}$ und $K = \mathbb{Z}_3$

Satz 23.24

Es sei X eine Menge, K ein Körper und W ein Vektorraum über K.

1. Zu jeder Funktion $f\colon X \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ mit der Eigenschaft $f = g \circ e_\bullet$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

2. Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ durch $f(x) := g(e_x)$ für alle $x \in X$ eine Funktion $f\colon X \to W$ definiert.
3. Die Zuordnung

$$W^X \ni f \mapsto g \in \mathrm{Homo}((K^X)_{00}, W)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

Satz 23.24

Es sei X eine Menge, K ein Körper und W ein Vektorraum über K.

1. Zu jeder Funktion $f\colon X \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ mit der Eigenschaft $f = g \circ e_\bullet$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Für $(\mathbb{Z}_3^{\{\top,\perp\}})_{00}$ und $f\colon X \to \mathbb{Z}_3^2$ mit

$$f(\top) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\perp) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$g(1e_\top + 2e_\perp) =$$

Faktorisierung durch einen kleineren (Faktor-)raum

Beobachtung:

Falls wir nur an Darstellungen von f aus einem Unterraum $S \subset W^X$ interessiert sind, dann haben wir zu viele $g \in \operatorname{Homo}((K^X)_{00}, W)$ bzw. der Raum $(K^X)_{00}$ ist noch zu groß.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & (K^X)_{00} / N \arrow[dl, "\widehat{g}"] \\
& W &
\end{tikzcd}
$$

Der größte Unterraum N den wir ausfaktorisieren können, so dass alle relevanten g auch durch $(K^X)_{00} / N$ faktorisieren ist

$$N =$$

die Tensorproduktkonstruktion mit $X \coloneqq U \times V$

Für das Tensorprodukt:

Setze $X \coloneqq U \times V$ und $S \coloneqq \mathrm{Bil}(U, V; W)$ und $N = \langle E \rangle$ für

$$\begin{aligned} E \coloneqq & \left\{ e_{(u_1+u_2,v)} - e_{(u_1,v)} - e_{(u_2,v)} \,\middle|\, u_1, u_2 \in U,\ v \in V \right\} \\ & \cup \left\{ e_{(u,v_1+v_2)} - e_{(u,v_1)} - e_{(u,v_2)} \,\middle|\, u \in U,\ v_1, v_2 \in V \right\} \\ & \cup \left\{ e_{(\alpha\, u,v)} - \alpha\, e_{(u,v)} \,\middle|\, u \in U,\ v \in V,\ \alpha \in K \right\} \\ & \cup \left\{ e_{(u,\beta\, v)} - \beta\, e_{(u,v)} \,\middle|\, u \in U,\ v \in V,\ \beta \in K \right\} \subseteq (K^{U\times V})_{00} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^{U\times V})_{00} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & (K^{U\times V})_{00} / N \arrow[dl, "\widehat{g}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Setze dann:

$$U \otimes_/ V \coloneqq (K^{U\times V})_{00} / \langle E \rangle$$

$$\text{und} \quad u \otimes_/ v \coloneqq [e_{(u,v)}] = e_{(u,v)} + \langle E \rangle \quad \text{für alle } u \in U, v \in V$$

Tensorprodukteigenschaften

Lemma 23.27 - Bilinearität von $\otimes_/$

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1 \otimes_/ v + u_2 \otimes_/ v &= (u_1 + u_2) \otimes_/ v \\ u \otimes_/ v_1 + u \otimes_/ v_2 &= u \otimes_/ (v_1 + v_2) \\ (\alpha\, u) \otimes_/ v &= \alpha\, (u \otimes_/ v) \\ u \otimes_/ (\beta\, v) &= \beta\, (u \otimes_/ v) \end{aligned}$$

für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$ sowie $\alpha, \beta \in K$.

Beweis.

Tensorprodukteigenschaften

Satz 23.28

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K. Dann ist die obige Konstruktion ein Tensorprodukt von U und V.

Tensorrang

Rang von Tensoren vs Rang von Matrizen

Definition 15.14

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\operatorname{Rang}(A) := \operatorname{ZRang}(A) = \operatorname{SRang}(A).$$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

Satz 23.38

[...] Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n\times m}$ bzgl. der Basis $B_{U\otimes V}$:

$$\operatorname{Rang}(t) = \operatorname{Rang}(A)$$

Zusammenhang Rang von Tensoren und Rang von Matrizen

Definition 15.14

Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann ist der **Rang** von A definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

Tensoren als Lineare Abbildungen

Welche Tensorkombinationen kann man „auswerten“?

Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^2$ und

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$$

$$u^* := \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 1x + 2y \right) \in U^*, \quad v^* := 0 \in V^*.$$

