# Plenarübung Lineare Algebra II

## (Inhalts)-Woche 03

Link zu diesen Folien

# Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in wenigen Folien:
   1. Erzeugung/Basen in Tensorprodukträumen
   2. Tensorrang
   3. Tensorprodukte linearer Abbildungen
   4. Darstellung von Tensoren (Komponentenmatrizen)
   5. Tensoren als lineare Abbildungen
3. Kurzquiz
4. (Bi-)lineare Überbestimmung auf Erzeugendensystemen
5. Konstruktion von Tensoren
6. Rang von Tensoren vs. Rang von Matrizen
7. Beispiel Rangbestimmung
8. Beispiel Tensoren als lineare Abbildungen

# Wochenüberblick

1-Lin Algebra

Vektorraum

Basis

Homomorphismen

Darstellungen

Dualraum

Transformation

bildet

Produktbasis

$f_1 \boxtimes f_2$

2 Darst.

Vektor / Matrix

$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$

spezielle Bedeutung

Woche 2/3

Tensorprod.

$(U \otimes V, \otimes)$

Def. der univers. Eigenschaft

Eindeutigkeit

Rang

Konstruktion (heute)

Interpretation als $\mathrm{Hom}(U^*, V)$, $\mathrm{Hom}(V^*, U)$

⋮

Woche 4

Tensorprodukt

$V_1 \otimes \dots \otimes V_n$

später

Determinanten

# Wochenwiederholung

# Erzeugendensystem und Basis

**Lemma 23.12** (Basisunabhängig)

i.A. $\neq \{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\}$

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt: Die Elementartensoren bilden ein Erzeugendensystem von $U \otimes V$.

$\{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\}$

**Lemma 23.13** (Basisabhängig)

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Weiter seien $B_U = (u_i)_{i \in I}$ bzw. $B_V = (v_j)_{j \in J}$ Basen von $U$ bzw. $V$. Dann gilt:

1. $B_{U \otimes V} := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis von $U \otimes V$.

   $\rightsquigarrow$ induzierte Basis / Tensorproduktbasis

2. $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$.

   Mit Konventionen für $0/\infty$

# Tensorrang

Im Fall 2-adiger Tensoren gut machbar

## Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$\binom{0}{1} \otimes \binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ hat Rang 1

minimal?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in \langle \{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\} \rangle = U \otimes V$$

→ HA Koeffizienten von Rang 1 Tensoren sind eingeschränkt

→ Später Komponentenmatrizen

## Lemma 23.18

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume mit Basen über demselben Körper und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Dann gilt:

1. Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
2. Für $u \in U$ und $v \in V$ gilt
$$\underbrace{u \otimes v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \text{ oder } v = 0}_{\text{Basisabhängig}}$$
3. Jeder Elementartensor $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ ist vom Rang 1.

HA:
$u \otimes v = \tilde{u} \otimes \tilde{v}$
$\Leftrightarrow$
$u = \lambda_u \tilde{u}$
$v = \lambda_v \tilde{v}$
$\lambda_u \lambda_v = 1$

# Tensorprodukt linearer Abbildungen

## Definition 23.30 und Lemma 23.32

Es seien $f_1 \in \mathrm{Homo}(U_1, V_1)$ und $f_2 \in \mathrm{Homo}(U_2, V_2)$. Dann heißt

Hilft insbesondere bei Dualitätsresultaten

$$f_1 \boxtimes f_2 : \begin{cases} \underline{U_1 \otimes U_2} \to \underline{V_1 \otimes V_2} \\ u_1 \underline{\otimes} u_2 \mapsto f_1(u_1) \underline{\otimes} f_2(u_2) \end{cases}$$

„adsenweise“

das **Tensorprodukt** der Abbildungen $f_1$ und $f_2$. Ordnen wir die (endlichen) Basen $B_{U_1 \otimes U_2}$ und $B_{V_1 \otimes V_2}$ lexikographisch, dann gilt

$$\underline{\mathcal{M}_{B_{V_1 \otimes V_2} \leftarrow B_{U_1 \otimes U_2}}(f_1 \boxtimes f_2)} = \underline{A \boxtimes B} \in K^{(n_1 n_2) \times (m_1 m_2)}$$

Erwartet langen Koeffizienten-vektor

mit

Block in der Blockmatrix darstellen

$$A \boxtimes B := \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}\, B} & a_{12}\, B & \cdots & a_{1m_1}\, B \\ a_{21}\, B & a_{22}\, B & \cdots & a_{2m_1}\, B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}\, B & a_{n_1 2}\, B & \cdots & a_{n_1 m_1}\, B \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{matrix} (1,1) \\ \vdots \\ (1,m_2) \\ (2,1) \\ \vdots \\ (2,m_2) \end{matrix}$$

# Darstellung von Tensoren

Bessere Beziehung zu
↓ Eigenschaften des Tensors

## Vektorraum $V$

Für $\dim(V) = n$ ist

$$V \;\cong\; K^n$$

Ist $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$, dann repräsentiert ein Koordinatenvektor $x \in K^n$ den Vektor

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j = \Phi_{B_V}(x)$$

Die Koordinaten $x_j$ können mit Hilfe der zu $B_V$ dualen Basis von $V^*$ ermittelt werden.

## Tensorproduktraum $U \otimes V$

Für $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$ ist

$$U \otimes V \;\cong\; K^{n \times m}$$

Sind $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ und $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ Basen, dann repräsentiert eine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ den Tensor

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boxed{a_{ij}} (u_i \otimes v_j) = \Phi_{B_{U \otimes V}}(A)$$

$a_{ij} = u_i^* \otimes v_j^* (t)$

Die Komponenten $a_{ij}$ können mit Hilfe der zu $B_{U \otimes V}$ dualen Basis von $(U \otimes V)^*$ ermittelt werden.

$u \otimes v \in$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& U \otimes V \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Homo}(U^*, V) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Homo}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
& \mathrm{Homo}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}$$

$v^* \otimes v^* \longmapsto \langle v^*, v \rangle u \in U$

Achsen arbeiten bilinear auf den Dualräumen

- Ein Tensor in $U \otimes V$ kann an seinen beiden „Eingängen“ Vektoren aus $U^*$ bzw. $V^*$ entgegennehmen.
- Wird ein Eingang mit einem Vektor belegt, so wird er vom Tensor „konsumiert“. Der Faktor entsprechende Faktor in $U \otimes V$ wird dabei „verbraucht“.
- In Komponentendarstellung wird die entsprechende Achse mit dem Koordinatenvektor des anliegenden Vektors **kontrahiert**.

# Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

✓ 1. $U \otimes V \cong V \otimes U$

kanonischer Iso   $u \otimes v \longmapsto v \otimes u$

✗ 2. In $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \otimes \mathcal{P}(\{r, g, b\})$ über $\mathbb{Z}_2$ existieren Tensoren vom Rang 5.

Dim $(\mathcal{P}(\{r,g,b\}) = 3$ ist die Schranke

✗ 3. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \underline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \underline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$ hat Rang 2.

$= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Rang 1

✓ 4. $f_1 \boxtimes f_2(u \otimes 0) = 0$

$f_1(u) \otimes f_2(0) = f_1(u) \otimes 0 = 0$

✓ 5. Sind $f_1$ und $f_2$ injektiv, dann ist $f_1 \boxtimes f_2$ injektiv

Über Kroneckerprodukt   $\operatorname{Rang}(A \boxtimes B) = \operatorname{Rang}(A)\operatorname{Rang}(B)$

# Konfliktfreie Überbelegung bei Linearer Fortsetzung auf Tensorprodukträumen

# Überbelegung von $\otimes$

Gegeben seien $K$-Vektorräume $U, V$ und die Vorschrift:

$$f : U \underset{1}{\otimes} V \ni u \underset{2}{\otimes} v \mapsto v \underset{3}{\otimes} v \in V \underset{4}{\otimes} V$$

1. Wieviele Bedeutungen des Symbols $\otimes$ sehen wir in der Vorschrift?

   1 und 4: Rein notationell
   2: Auswertung von $\otimes$ aus $(U \otimes V, \otimes)$
   3: — " — $(V \otimes V, \otimes)$

2. Definiert die gegebene Vorschrift eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(U \otimes V, V \otimes V)$?

   I. A. nicht mal wohldef. $\lambda \in K \setminus \{1, 0\}$, $u \neq 0, v \neq 0$

   $$v \otimes v = f(\lambda u \otimes v) = f(\lambda (u \otimes v)) = f(u \otimes \lambda v) = \lambda^2 \, v \otimes v$$

   Vorschrift auf den Elementartensoren nicht hilfreich!

# Definition von Homomorphismen über lineare Fortsetzung

## Satz 17.10

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei $K$-Vektorräume und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in $W$.

1. Ist $(v_i)_{i \in I}$ lin. unabh., dann gibt es ein $f \in \text{Homo}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

   z.B. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(v_{i})_{i \in I} = (e_1)$

   $\Rightarrow f(e_1) = 0$

   $f(e_2)$ beliebig

2. Ist $(v_i)_{i \in I}$ Basis, dann gibt es genau ein $f \in \text{Homo}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

   $(v_i) = (e_1, e_2)$

   $f(e_1) = 0$

   $f(e_2) = 1$

Vermeidet man Konflikte in den Werten, dann darf man $f$ aber sogar auf beliebigen Familien die Werte vorgeben. Erzeugendensysteme liefern dann eindeutige Homomorphismen

z.B. $(v_i)_{i \in I} = (e_1, e_2, e_1 + e_2)$

$f(e_1) = 0$

$f(e_2) = 1$

$f(e_1 + e_2) = 1$

# (Über-)definition von Homomorphismen auf Tensorräumen

Häufig beschreiben wir lineare Abbildungen auf Tensorprodukträumen durch ihr Verhalten auf den einfachen Tensoren, also

bilinear in $(u,v)$

$$f : U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto \dots \in W$$

$b(u,v)$

Wenn bilinear vorgeschrieben, löst die univ. Eig alle Konflikte

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r] \arrow[dr, "b"'] & U \otimes V \arrow[d, "f"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

iso

Definitionsprozess.

1. Def. $b \in \mathrm{Bil}(U,V;W)$

2. Univ. Eigenschaft impl. eindeutige

$f : U \otimes V \ni u \otimes v \mapsto b(u,v)$

Konfliktvermeidung ist hier eingebaut

# § 23.4 Konstruktion eines Tensorprodukts

# Übersicht: Tensorproduktkonstruktion

## Unser gewünschtes Tensorprodukt

Zu VR $U, V, W$ eine bilineares $\otimes$ mit isomorpher Zuordnung bilinearer $b$ zu eindeutigen linearen $f$ mit $b = f \circ \otimes$ existiert.

Kein VR-Struktur

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\boxed{\otimes}\ \text{bil}"] \arrow[dr, "b"'] & \boxed{U \otimes V}\ \text{VR} \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$(W^{U \times V} \supseteq) BIL(U,V;W) \ni b \xrightarrow{\text{iso}} f \in Hom(U \otimes V, W)$

1. $U \otimes V$
2. $\otimes$ bil
3. Isomorphie in Zuordnung

## Wir konstruieren jetzt:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & ? \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & ?/? \arrow[dl, "\widehat{g}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

$W^{U \times V} \ni f \xrightarrow{\text{iso}} g$

$BIL(U,V;W) \ni f \xrightarrow{\text{iso}} \widehat{g}$

Schritt 1:
Alle Abbildungen $f \in W^{U \times V}$ isomorph $g \in Hom(?, W)$ zuordnen

Schritt 2: Einschränken auf Teilraum $BIL(U,V;W) \subseteq W^{U \times V}$

Durch Faktorisierung Isomorphie ver

# freier Vektorraum über einer Menge $X$ ( der Zwischenraum)

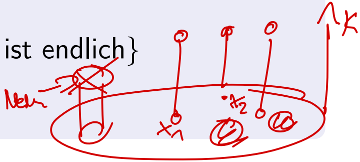
Erinnerung: Ist $V$ $K$-VR mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, dann ist $V \cong K^I_{00}$ Zuordnung $v_i \leftrightarrow e_{v_i}$

## Definition 23.22

Es sei $X$ eine Menge und $K$ ein Körper. Der **freie $K$-Vektorraum über der Menge $X$** ist der $K$-Vektorraum

$$(K^X)_{00} := \{f : X \to K \mid \operatorname{supp} f \text{ ist endlich}\}$$

der endlich getragenen Funktionen $X \to K$.




## Basis des freien Vektorraums

Die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ ist eine Basis von $(K^X)_{00}$. $f = \sum_{x\in X} f(x) e_x$

$\neq 0$ nur für endl. v. P.!

$\dim K^X_{00} = \#X$

1. Für $X = \emptyset$ und beliebiges $K$ $\quad K^{\emptyset}_{00} = \underbrace{\{f : \emptyset \to K\}}_{\text{Nullraum}} = \{\emptyset\}$ $\quad \{e_x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$
2. Für $X = \{\top, \bot\}$ und $K = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

$K^{\{\top,\bot\}}_{00} = \{0, e_\top, e_\bot, 2e_\top, 2e_\bot, e_\top + e_\bot, 2e_\top + e_\bot, 2e_\bot + e_\top, 2e_\top + 2e_\bot\}$

## Satz 23.24

Es sei $X$ eine Menge, $K$ ein Körper und $W$ ein Vektorraum über $K$.

1. Zu jeder Funktion $f\colon X \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ mit der Eigenschaft $f = g \circ e_\bullet$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$W^X \ni f \xrightarrow{\text{iso}} g \in \mathrm{Homo}(K^X_{00}, W)$

$f \mapsto g$

2. Umgekehrt wird für jede lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ durch $f(x) := g(e_x)$ für alle $x \in X$ eine Funktion $f\colon X \to W$ definiert.
3. Die Zuordnung

$$W^X \ni f \mapsto g \in \mathrm{Homo}((K^X)_{00}, W)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

### Satz 23.24

Es sei $X$ eine Menge, $K$ ein Körper und $W$ ein Vektorraum über $K$.

1. Zu jeder Funktion $f\colon X \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $g\colon (K^X)_{00} \to W$ mit der Eigenschaft $f = g \circ e_\bullet$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$W^X \ni$

Definieren $g$ auf Basis $\{e_x \mid x \in X\}$ von $K^X_{00}$ via $g(e_x) = f(x)$ ~~$\forall x \in X$~~ und via lineare Fortsetzung. Linearität und Eindeutigkeit per Konstruktion.

Für $(\mathbb{Z}_3^{\{\top,\perp\}})_{00}$ und $f\colon X \to \mathbb{Z}_3^2$ mit

$$f(\top) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\perp) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$g(1e_\top + 2e_\perp) = 1g(e_\top) + 2g(e_\perp) = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Faktorisierung durch einen kleineren (Faktor-)raum

## Beobachtung:

Falls wir nur an Darstellungen von $f$ aus einem Unterraum $S \subset W^X$ interessiert sind, dann haben wir zu viele $g \in \mathrm{Homo}((K^X)_{00}, W)$ bzw. der Raum $(K^X)_{00}$ ist noch zu groß.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & (K^X)_{00} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & (K^X)_{00} / N \arrow[dl] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

$g(e_x) = f(x)$

$\hat{g}([e_x]) = g(e_x) = f(x)$

$W^X \ni f \xrightarrow{\text{iso}} g$

$S \subset W^X \xrightarrow{\text{iso}} \hat{g}$

Zusatzeigenschaften von $S$ werden in $N$ bzw. $\pi$ kodiert

Der größte Unterraum $N$ den wir ausfaktorisieren können, so dass alle relevanten $g$ auch durch $(K^X)_{00} / N$ faktorisieren ist

$g \in \mathrm{Homo}(K^X_{00}, W)$ mit $g \circ e_{(\cdot)} \in S$

$$N = \bigcap \{ \mathrm{Ker}(g) \mid g \in \mathrm{Homo}(K^X_{00}, W),\ g \circ e_{(\cdot)} \in S \}$$

Dann: $W^X \supseteq S \ni f \xrightarrow{\text{iso}} \hat{g} \in \mathrm{Homo}(K^X_{00}/N, W)$ mit $f = \hat{g} \circ \pi \circ e_{(\cdot)}$

# die Tensorproduktkonstruktion mit $X := U \times V$

Konkrete Anwendung des obigen

## Für das Tensorprodukt:

Setze $X := U \times V$ und $S := \mathrm{Bil}(U, V; W)$ und $N = \langle E \rangle$ für

$$\boxed{E} := \left\{ e_{(u_1+u_2,v)} - e_{(u_1,v)} - e_{(u_2,v)} \,\middle|\, u_1, u_2 \in U,\ v \in V \right\}$$
$$\cup \left\{ e_{(u,v_1+v_2)} - e_{(u,v_1)} - e_{(u,v_2)} \,\middle|\, u \in U,\ v_1, v_2 \in V \right\}$$
$$\cup \left\{ e_{(\alpha\, u,v)} - \alpha\, e_{(u,v)} \,\middle|\, u \in U,\ v \in V,\ \alpha \in K \right\}$$
$$\cup \left\{ e_{(u,\beta\, v)} - \beta\, e_{(u,v)} \,\middle|\, u \in U,\ v \in V,\ \beta \in K \right\} \subseteq (K^{U\times V})_{00}$$

⟨E⟩ liefert explizite Darst. von $N = \cap \operatorname{Ker} \ldots$

1. A. keine Basis

$\alpha = 1$

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "e_\bullet"] \arrow[rr, bend left, "\otimes_l"] \arrow[dr, "f"'] & (K^{U\times V})_{00} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & (K^{U\times V})_{00} / N \arrow[dl, "\hat{g}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

$U \otimes_l V$

ISO

$f \in \mathrm{Bil}$

$\hat{g} \in \mathrm{Hom}(U \otimes_l V, W)$

Setze dann:

$$U \otimes_{/} V := (K^{U\times V})_{00} / \langle E \rangle$$

und $\quad u \otimes_{/} v := [e_{(u,v)}] = e_{(u,v)} + \langle E \rangle \quad$ für alle $u \in U, v \in V$

Tensoren „sind" Nebenklassen von charakteristischen Funktionen

$\otimes_l = \pi \circ e_{(\cdot)}$

# Tensorprodukteigenschaften

## Lemma 23.27 - Bilinearität von $\otimes_/$

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} \underline{u_1} \otimes_/ v + \underline{u_2} \otimes_/ v &= \underline{(u_1 + u_2)} \otimes_/ v \\ u \otimes_/ \underline{v_1} + u \otimes_/ \underline{v_2} &= u \otimes_/ \underline{(v_1 + v_2)} \end{aligned}\right\} \text{Additiv}$$

$$\left.\begin{aligned} (\alpha u) \otimes_/ v &= \alpha (u \otimes_/ v) \\ u \otimes_/ (\beta v) &= \beta (u \otimes_/ v) \end{aligned}\right\} \text{Homog.}$$

für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$ sowie $\alpha, \beta \in K$.

**Beweis.** $(\alpha u) \otimes_/ V = [e_{(\alpha u, v)}] = e_{(\alpha u, v)} + \langle E \rangle$

$$= \alpha e_{(u,v)} + \overbrace{\underbrace{e_{(\alpha u, v)} - \alpha e_{(u,v)}}_{\in E} + \langle E \rangle}^{\langle E \rangle}$$

Null addiert

$$= \alpha e_{(u,v)} + \langle E \rangle = [\alpha e_{(u,v)}] = \alpha \cdot [e_{(u,v)}] = \alpha (u \otimes_/ v)$$

# Tensorprodukteigenschaften

## Satz 23.28

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper $K$. Dann ist die obige Konstruktion ein Tensorprodukt von $U$ und $V$.

$U \otimes_K V$ VR

$\otimes_K$ bilinear

Isomorphie Bed. $b \mapsto f$

Alles nach Konstruktion

Es gibt alternative Konstruktionen.

# Tensorrang

# Rang von Tensoren vs Rang von Matrizen

## Definition 15.14

Es seien $K$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann ist der **Rang** von $A$ definiert als

$$\operatorname{Rang}(A) := \operatorname{ZRang}(A) = \operatorname{SRang}(A).$$

## Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

## Satz 23.38

[...] Dann gilt für jeden Tensor $t \in U \otimes V$ und seine Komponentenmatrix $A \in K^{n \times m}$ bzgl. der Basis $B_{U \otimes V}$:

$$\operatorname{Rang}(t) = \operatorname{Rang}(A)$$

# Zusammenhang Rang von Tensoren und Rang von Matrizen

## Definition 15.14

Es seien $K$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann ist der **Rang** von $A$ definiert als

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A).$$

## Definition 23.16

Der **Rang** eines Tensors $t \in U \otimes V$, geschrieben $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$, ist die minimale Anzahl von Summanden in einer Darstellung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$$

# Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

$U$ und $V$ seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

# Tensoren als Lineare Abbildungen

# Welche Tensorkombinationen kann man „auswerten"?

Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^2$ und

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$$

$$u^* := \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 1x + 2y \right) \in U^*, \quad v^* := 0 \in V^*.$$