Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 02

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in 6 Folien:
    1. Duale Abbildung
    2. Dualität und Faktorräume
    3. Bidualität
    4. Bilinearität
    5. Tensorprodukte
3. Kurzquiz
4. Übersicht Dualität und Faktorräume
5. Übersicht Bidualität
6. Hausaufgabe II-2.2 (Biduale Basen)
7. Motivation Multilinearität
8. Linearität vs Bilinearität
9. Mehr zu universellen Eigenschaften

Wochenüberblick

Aussagen zur dualen Abbildung

Es seien U, V und W Vektorräume über K mit Basen B_V bzw. B_W und $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$, $g \in \operatorname{Homo}(U, V)$. Dann gilt

1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
2.
   1. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ surjektiv.$^{\text{AoC}}$
   2. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ injektiv.$^{\text{AoC}}$
   3. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ bijektiv.$^{\text{AoC}}$
   4. Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
3. $f \mapsto f^*$ ist ein injektiver$^{\text{AoC}}$ Homomorphismus.
4. $A = \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f) \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_W^*}(f^*)$
5. $\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$
6.
$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f^*) &= \operatorname{Kern}(f)^0 && \text{in } V^* \\ \operatorname{Kern}(f^*) &= \operatorname{Bild}(f)^0 && \text{in } W^* \\ \operatorname{Bild}(f) &= {}^0\operatorname{Kern}(f^*) && \text{in } W \\ \operatorname{Kern}(f) &= {}^0\operatorname{Bild}(f^*) && \text{in } V \end{aligned}$$

Dualraum eines Faktorraumes

Lemma 21.15

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $\pi\colon V \to V\,/\,U$ die kanonische Surjektion. Das Bild von $\pi^*\colon (V\,/\,U)^* \to V^*$ ist U^0 und Einschränkung

$$\pi^*|^{U^0}\colon \begin{cases} (V\,/\,U)^* \to U^0 \\ q^* \mapsto \pi^*(q^*) \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad (V\,/\,U)^* \cong U^0$$

Lemma 21.17

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $i\colon U \to V$ die kanonische Injektion. Der Kern von $i^*\colon V^* \to U^*$ ist U^0 und es gilt:

$$I\colon \begin{cases} V^*\,/\,U^0 \to U^* \\ [v^*] \mapsto i^*(v^*) = v^*|_U \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad V^*\,/\,U^0 \cong U^*$$

Bidualität

Satz 22.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

1. Die Abbildung
$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot\,, v \rangle \in V^{**}$$
ist ein injektiver$^{\text{AoC}}$ Homomorphismus.

   Sie heißt die **kanonische Injektion** oder **kanonische Einbettung** von V in V^{**}.

2. Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\dim(V) = \dim(V^{**})$.

bilineare Abbildungen

Definition 23.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $b\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn sie in beiden Eingängen linear ist.

Bemerkung 23.5

1. Bilinearität $b\colon U \times V \to W$ nutzt
   - U und V (und W) als Vektorräume
   - $U \times V$ als Menge (kartesisches Produkt)
   - aber nicht $U \times V$ als Vektorraum (Produktraum)
2. ein weiterer Hinweis, dass $U \times V$ als Produktraum nicht das richtige Objekt für bilineare Abbildungen ist:
   - $\dim(U) \cdot \dim(V)$ Werte legen $b\colon U \times V \to W$ eindeutig fest
   - $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "b"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Definition 23.6

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K. Weiter seien $\mathcal{T}$ ein weiterer K-Vektorraum und $\otimes\colon U \times V \to \mathcal{T}$ bilinear.

1. Das Paar $(\mathcal{T}, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von U und V, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

   Für jede bilineare Abbildung $b\colon U \times V \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(\mathcal{T}, W)$ mit der Eigenschaft $b = f \circ \otimes$, also

   $$b(u, v) = f(u \otimes v) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V$$

Eindeutigkeit von Tensorprodukten

Satz 23.11

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K.

1. Sind $(U \otimes V, \otimes)$ und $(U \mathbin{\widetilde{\otimes}} V, \widetilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte von U und V, dann gibt es einen Isomorphismus $I \in \operatorname{Iso}(U \otimes V, U \mathbin{\widetilde{\otimes}} V)$ mit $\widetilde{\otimes} = I \circ \otimes$, d. h., folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & U \times V \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\widetilde{\otimes}"] & \\ U \otimes V \arrow[rr, "I"'] & & U \mathbin{\widetilde{\otimes}} V \end{tikzcd}$$

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. Es gibt ein injektives $f^* \in \{f^* \mid f \in \mathrm{Homo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)\}$.
2. Ist U UR von V, dann ist $V^* \,/\, U^0 = U^*$.
3. $u \otimes v = 0$ g.d.w. $u = 0$ oder $v = 0$
4. $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv
5. $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

Übersicht Dualität und Faktorräume

Übersicht zu Bidualität

Duale und dazu primale Basen 1

Hausaufgabe II-2.2

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Können wir wie folgt vorgehen?

1. Wähle Basis $B^* = (b_i^*)_{i \in I}$ von V^* und Isomorphismus $f \in \mathrm{Iso}(V^*, V)$
2. Nach Vorlesung ist $(f(b_i^*))_{i \in I}$ Basis von V.
3. Definiere für alle $i \in I$ die Bilder $f(b_i^*)$ so dass $b_i^*(f(b_i^*)) = \delta_{ij}$.

Duale und dazu primale Basen 2

Hausaufgabe II-2.2

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Motivation für Multilinearität - Quantenmechanik

1. In der Quantenmechanik werden Systeme über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

2. Messgrößen (Observablen) werden durch O in $\mathrm{Homo}(V, V)$ dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

3. Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

4. Mehrteilchensysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.

Bilinearität vs Linearität

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\overline{u} \in U$ und jedes feste $\overline{v} \in V$

$$f(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto f(\overline{u}, v) \in W$$
$$f(\cdot, \overline{v})\colon U \ni u \mapsto f(u, \overline{v}) \in W$$

beide linear sind.

Frage: Was ist $\dim(\mathrm{Homo}(U \times V; W) \cap \mathrm{Bil}(U, V; W))$?

1. Der Schnitt ist leer.
2. 0
3. 1
4. Hängt von $\dim(U)$ und $\dim(V)$ ab.

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie eine Darstellung der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^{\{0,1\}} \times \mathbb{R}^{\{0,1,2\}} \ni (p, q) \mapsto (p(0)q(2), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$ im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

Eine (weitere) mysteriöse universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} U \subseteq V \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Es sei U ein UR von V über K. Weiter seien $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum und $h\colon V \to \mathcal{F}$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}(h) \supseteq U$. Das Paar $(\mathcal{F}, h)$ heißt ein   von V bzgl. U, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Für jede lineare Abbildung $g\colon V \to W$ mit $\mathrm{Kern}(g) \supseteq U$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(\mathcal{F}, W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ h$.

Eindeutigkeit

Gegeben seien U UR von V und $(\mathcal{F}, h)$, $(\bar{\mathcal{F}}, \bar{h})$. Dann gibt es einen Isomorphismus $I\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ mit $h = \bar{h} \circ I$.