Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 02

Start 14:15

Link zu diesen Folien

Das heutige Programm

1. Wochenüberblick
2. Wochenwiederholung in 6 Folien:
    1. Duale Abbildung
    2. Dualität und Faktorräume
    3. Bidualität
    4. Bilinearität
    5. Tensorprodukte
3. Kurzquiz
4. Übersicht Dualität und Faktorräume
5. Übersicht Bidualität
6. Hausaufgabe II-2.2 (Biduale Basen)
7. Motivation Multilinearität
8. Linearität vs Bilinearität
9. Mehr zu universellen Eigenschaften

Wochenüberblick

Dualität (1-Lin. Algebra)

Basen, Duale Abb, etc.

- Fundamentalen Unterräume
  (Zshg zw. Bild/Kern von f / f^*)
- Dualräume und Faktorräume
  $(V/U)^*$ & (V^*/U^0)
- Bidualität

$$\left.\begin{matrix} V, & V^*, & V^{**} \\ f, & f^*, & f^{**} \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \begin{matrix} \dim V < \infty \\ i : V \to V^* \end{matrix}$$

kanonischen Isomorphismus

Multilineare Algebra

Bilinearität

$$b(\cdot,\cdot) : U \times V \to W$$

$\uparrow\uparrow$ jeweils linear

$\underbrace{\qquad\qquad}$

Def. auf Produkten von Basen

Tensorprodukte (Def. über Wunschliste)

$$b : U \times V \to W \longleftrightarrow f : U \otimes V \to W$$

Eindeutigkeit $\nearrow$

via universelle Eigenschaft def.

Aussagen zur dualen Abbildung

Es seien U, V und W Vektorräume über K mit Basen B_V bzw. B_W und $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$, $g \in \operatorname{Homo}(U, V)$. Dann gilt

1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
2.
   1. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ surjektiv.$^{\text{AoC}}$
   2. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ injektiv.$^{\text{AoC}}$
   3. $f \in \operatorname{Homo}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Homo}(W^*, V^*)$ bijektiv.$^{\text{AoC}}$
   4. Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $\underline{(f^*)^{-1}} = \underline{(f^{-1})^*}$.
3. $\underline{f} \mapsto \underline{f^*}$ ist ein injektiver$^{\text{AoC}}$ Homomorphismus.
4. $\underline{A = \mathcal{M}_{B_W \leftarrow B_V}(f)} \quad \Rightarrow \quad \underline{A^{\mathsf{T}} = \mathcal{M}_{\boxed{B_V^*} \leftarrow \boxed{B_W^*}}(f^*)}$
5. $\underline{\operatorname{Rang}(f^*)} = \underline{\operatorname{Rang}(f)}$
6.
$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild}(f^*) &= \operatorname{Kern}(f)^0 && \text{in } V^* \\
\operatorname{Kern}(f^*) &= \operatorname{Bild}(f)^0 && \text{in } W^* \\
\operatorname{Bild}(f) &= {}^0\operatorname{Kern}(f^*) && \text{in } W \\
\operatorname{Kern}(f) &= {}^0\operatorname{Bild}(f^*) && \text{in } V
\end{aligned}$$

Dualraum eines Faktorraumes

4 Hauptzutaten: $U \subseteq V$, $U^0 \subseteq V^*$

2 Abbildungen π^*, i^*

Lemma 21.15

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $\pi \colon V \to V\,/\,U$ die kanonische Surjektion. Das Bild von $\pi^* \colon (V\,/\,U)^* \to V^*$ ist U^0 und Einschränkung

$$\pi^*|^{U^0} \colon \begin{cases} (V\,/\,U)^* \to U^0 \\ q^* \mapsto \pi^*(q^*) \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad \underbrace{(V\,/\,U)}_{f \text{ arbeitet auf Klassen von } V}^* \cong \overset{f \text{ ``ignoriert'' } U}{U^0}$$

Lemma 21.17

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei $i \colon U \to V$ die kanonische Injektion. Der Kern von $i^* \colon V^* \to U^*$ ist U^0 und es gilt:

$$I \colon \begin{cases} V^*\,/\,U^0 \to U^* \\ [v^*] \mapsto i^*(v^*) = v^*|_U \end{cases} \quad \text{ist ein Isomorphismus} \quad \underbrace{V^*\,/}_{\text{Klasse von Abbildungen ohne Informationen auf ``V ohne U''}} U^0 \cong \overset{\text{Abb auf } U}{U^*}$$

Bidualität

Satz 22.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

1. Die Abbildung

$$\underline{i_V} := V \ni \boxed{v} \mapsto \underset{V^*,V}{\langle \overset{v^* \in V^*}{\overset{\downarrow}{\cdot}}, v \rangle} \in \boxed{V^{**}} \quad v^*(v)$$

   ist ein injektiver$^{\mathrm{AoC}}$ Homomorphismus.

   Sie heißt die **kanonische Injektion** oder **kanonische Einbettung** von V in V^{**}.

2. Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\boxed{\dim(V) = \dim(V^{**}).}$

Das war bereits wegen

$V \cong V^* \cong V^{**}$ und die Transitivität von $\cong$

klar

aber eben nicht basisunabhängig

bilineare Abbildungen

Definition 23.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $b\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn sie in beiden Eingängen linear ist.

$\forall u,v:$ $b(u,\cdot)$ lin auf V

$b(\cdot,v)$ lin auf U

Bemerkung 23.5

1. Bilinearität $b\colon U \times V \to W$ nutzt
   - U und V (und W) als Vektorräume
   - $U \times V$ als Menge (kartesisches Produkt)
   - aber nicht $U \times V$ als Vektorraum (Produktraum)
2. ein weiterer Hinweis, dass $U \times V$ als Produktraum nicht das richtige Objekt für bilineare Abbildungen ist:
   - $\dim(U) \cdot \dim(V)$ Werte legen $b\colon U \times V \to W$ eindeutig fest
   - $\dim(U \times V) =$ ~~$\dim(U) + \dim(V)$~~ Basis $\{(b_u,0) \mid b_u \in B_U\} \cup$ $\{(0,b_v) \mid b_v \in B_V\}$

Das Tensorprodukt

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "b"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Wunschliste für den Zettel 1–20

Multilinearität

Existenz und Eindeutigkeit noch offen

Definition 23.6

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K. Weiter seien $\mathcal{T}$ ein weiterer K-Vektorraum und $\otimes \colon U \times V \to \mathcal{T}$ bilinear.

1. Das Paar $(\mathcal{T}, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von U und V, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

   Für jede bilineare Abbildung $b \colon U \times V \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \operatorname{Homo}(\mathcal{T}, W)$ mit der Eigenschaft $b = f \circ \otimes$, also

$$b(u, v) = f(u \otimes v) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V$$

Eindeutigkeit von Tensorprodukten

Satz 23.11 (Eindeutigkeit)

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K.

1. Sind $(U \otimes V, \otimes)$ und $(U \mathbin{\tilde{\otimes}} V, \tilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte von U und V, dann gibt es einen Isomorphismus $I \in \operatorname{Iso}(U \otimes V, U \mathbin{\tilde{\otimes}} V)$ mit $\underline{\tilde{\otimes} = I \circ \otimes}$, d. h., folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & U \times V \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\tilde{\otimes}"] & \\
U \otimes V \arrow[rr, "I"'] & & U \mathbin{\tilde{\otimes}} V
\end{tikzcd}$$

bilinear und stellen bilinear dar

$\tilde{\otimes} = f_1 \circ \otimes$

$\otimes = f_2 \circ \tilde{\otimes}$

$\Rightarrow \tilde{\otimes} = f_1 \circ f_2 \circ \tilde{\otimes}$

$\tilde{\otimes} = \mathrm{id} \circ \tilde{\otimes}$

$\xrightarrow[\text{aus univers. Eig.}]{\text{Eindeutigkeit}}$ $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}$

Rollentausch $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}$

$\Rightarrow f_1 = f_2^{-1}$

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

✓ 1. Es gibt ein injektives $\underline{f^*} \in \{f^* \mid f \in \underline{\mathrm{Homo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)}\}$.

z.B. id*

f 2. Ist U UR von V, dann ist $\underline{V^* / U^0} \boxed{=} \underline{U^*}$.

✓ 3. $\underline{u \otimes v = 0}$ g.d.w. $u = 0$ oder $v = 0$

f 4. $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv

$\otimes^{-1}\{0\} \supseteq 0 \times V$

5. $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

f Gibt es andere Tensoren als einfache?

Übersicht Dualität und Faktorräume

$$\begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l] & (V/U)^* \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$i^*: V^* \ni v^* \mapsto v^*|_U \in U^*$

Letzte Woche gesehen

$\pi^*: (V/U)^* \ni q^* \mapsto q^* \circ \pi \in V^*$

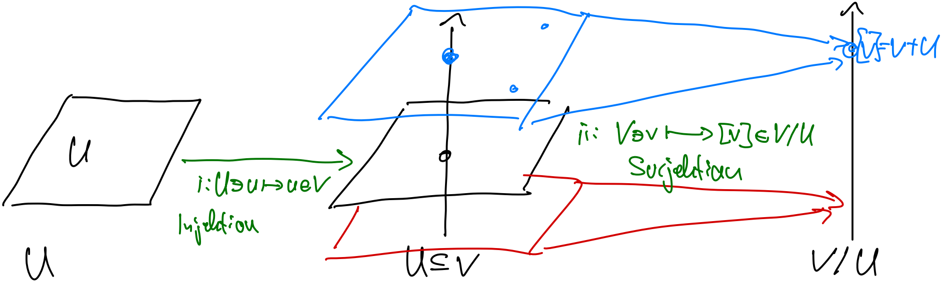
Injektion

$\mathrm{Ker}(i^*) = U^\circ = \mathrm{Bild}(\pi^*)$

Homomorphiesatz

Arbeit

$\mathrm{Bild}(i) = U = \mathrm{Ker}(\pi)$



Übersicht zu Bidualität

$$\begin{tikzcd}
V^{**} \arrow[rrrr, "f^{**}"] \arrow[drr] \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[dddd, dashed, bend right=60, "\dim<\infty"'] & & & & W^{**} \arrow[dll] \arrow[dddd, dashed, bend left=60, "\dim<\infty"] \\
 & \langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*} & K & \langle\cdot,\cdot\rangle_{W^*} & \\
V^{*} \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[dd, leftrightarrow] & & & & W^{*} \arrow[llll, "f^{*}"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \arrow[uu, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow, "\substack{\dim<\infty \\ \text{basisabh.}}"] \\
 & \langle\cdot,\cdot\rangle_{V} & K & \langle\cdot,\cdot\rangle_{W} & \\
V \arrow[urr] \arrow[rrrr, "f"'] \arrow[uuuu, bend left=50, "i_V\ \text{kanonisch}"] & & & & W \arrow[ull] \arrow[uuuu, bend right=50, "i_W"']
\end{tikzcd}$$

Duale und dazu primale Basen 1

Hausaufgabe II-2.2

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Können wir wie folgt vorgehen?

B^* fix

1. ✓ Wähle Basis $B^* = (b_i^*)_{i \in I}$ von V^* und Isomorphismus $f \in \mathrm{Iso}(V^*, V)$ f fix
2. ✓ Nach Vorlesung ist $(f(b_i^*))_{i \in I}$ Basis von V.
3. Definiere für alle $\underset{j}{i} \in I$ die Bilder $f(b_{\underset{j}{i}}^*)$ so dass $b_i^*(f(b_{\underset{j}{i}}^*)) = \delta_{ij}$.

Duale und dazu primale Basen 2

Hausaufgabe II-2.2

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Setze $B := i^{-1}(\underbrace{(B^*)^*}_{\subseteq V^{**}}) \subseteq V$

Ist Basis von V nach VL

Und es gilt: $\forall v_j \in B, b_i \in B^*$

$$\langle b_i^*, v_j \rangle_{V^*,V} = \langle b_i^*, i^{-1}(b_j^*)^* \rangle_{V^*,V}$$

$$= \langle (b_j^*)^*, b_i^* \rangle_{V^{**},V^*}$$

$$= \delta_{ij}$$

Motivation für Multilinearität - Quantenmechanik

1. In der Quantenmechanik werden Systeme über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

   Innenprodukte, Vollständigkeit, Reflexivität

2. Messgrößen (Observablen) werden durch O in Homo(V, V) dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

   Folgt direkt im Anschluss an die Multilineare Alg.

3. Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

   ↑ Schwache Form im Dualraum

   $A : V \to V^*$

   $Av = f$ in V^*

4. Mehrteilchensysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.

$$(p_1 z_1 + p_2 z_2) \otimes (\tilde{p}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{p}_2 \tilde{z}_2) = p_1 \tilde{p}_1 (z_1 \otimes \tilde{z}_1) + \dots + p_2 \tilde{p}_2 (z_2 \otimes \tilde{z}_2)$$

Bilinearität vs Linearität

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\overline{u} \in U$ und jedes feste $\overline{v} \in V$

$$f(\overline{u},\cdot)\colon V \ni v \mapsto f(\overline{u},v) \in W$$
$$f(\cdot,\overline{v})\colon U \ni u \mapsto f(u,\overline{v}) \in W$$

beide linear sind.

Frage: Was ist $\dim(\underbrace{\text{Homo}(U \times V; W)} \cap \underbrace{\text{Bil}(U,V;W)})$? in $W^{U\times V}$

1. Der Schnitt ist leer.
2. [✓ 0]
3. 1
4. Hängt von $\dim(U)$ und $\dim(V)$ ab.

$f\colon U\times V \Rightarrow W$ bilinear und linear

g.d.w. $f \equiv 0$

Mult.: $\lambda^2 f(u,v) = f(\lambda u, \lambda v) = f(\lambda(u,v)) = \lambda f(u,v) \quad \forall u,v \qquad f(u,v) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$

Additiv: $f(u,v) \underset{\text{Linearität}}{=} f(0,v) + f(u,0) \underset{\text{Bilinearität}}{=} 0 + 0 = 0$

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie eine Darstellung der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^{\{0,1\}} \times \mathbb{R}^{\{0,1,2\}} \ni (p,q) \mapsto (p(0)q(2), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$ im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

$$b(p,q) = (p(0)q(2), p(1)q(0))$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[dr, "b"'] & {} \arrow[d, "f"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$$f(p \otimes q) = (p(0)q(2), p(1)q(0))$$

Die Übersetzungsarbeit steckt im Tensorprodukt.

Eine (weitere) mysteriöse universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} U \subseteq V \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$h \hat{=} \pi$ kanonische Surjektion. Diese ist

① surjektiv

② $\mathrm{Kern}(h) = U$

Es sei U ein UR von V über K. Weiter seien $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum und $h\colon V \to \mathcal{F}$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}(h) \supseteq U$. Das Paar $(\mathcal{F}, h)$ heißt ein von V bzgl. U, wenn die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist:

Rolle der Bilinearität i.d. Tensorproduktdefinition

Für jede lineare Abbildung $g\colon V \to W$ mit $\mathrm{Kern}(g) \supseteq U$ in irgendeinen K-Vektorraum W gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f \in \mathrm{Homo}(\mathcal{F}, W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ h$.

① Angen. h nicht surjektiv, dann ist f nicht eind. auf Teilraum von $\mathcal{F}$ ↯

② Ang. $\mathrm{Ker}(h) \supsetneq U$ bedeutet kein g mit $\mathrm{Ker}(g) = U$ faktorisiert ↯

Eindeutigkeit

Gegeben seien U UR von V und $(\mathcal{F}, h)$, $(\bar{\mathcal{F}}, \bar{h})$. Dann gibt es einen Isomorphismus $I\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ mit $h = \bar{h} \circ I$.

$$\bar{h} = f_1 \circ h$$

$$h = f_2 \circ \bar{h}$$

$$\begin{tikzcd} & U \subseteq V \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\bar{h}"] & \\ \mathcal{F} \arrow[rr, leftrightarrow, "I"] & & \bar{\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{h} = f_1 \circ f_2 \circ \bar{h}$$

$$\bar{h} = \mathrm{id} \circ h$$

$$\rightsquigarrow \quad f_1 \circ f_2 = \mathrm{id} \quad \rightsquigarrow \quad f_1 = f_2^{-1}$$

Struktur ganz analog zu Tensorprodukträumen.

Existenz schon gesehen