Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 01

Link zu diesen Folien

Organisatorisches

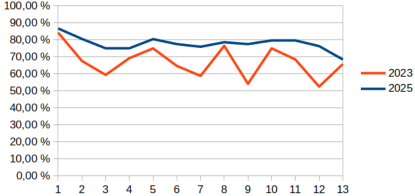
1. Bitte registrieren Sie sich:
   1. MÜSLI
   2. MaMpf
   3. Heico (1100111008 (VL) und 1100111009 (Übung))
2. Fragestunde Do 12:30 - 14:00
3. Anonyme Umfrage für Feedback, Themenwünsche und allgemeine Fragen

Das heutige Programm

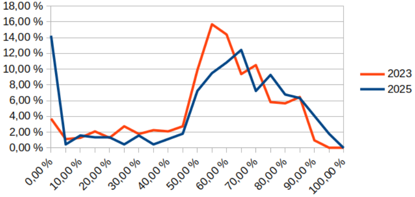
1. Ergebnisvergleich LA I / LA II
2. Wochenüberblick
3. Wochenwiederholung in 5 Folien:
   1. Dualräume
   2. Duale Basen
   3. (Prä-)Annihilatoren
   4. Duale Abbildungen
4. Kurzquiz
5. Ausführungen zum „Bestimmen einer dualen Basis“
6. Hausaufgabe II-1.4 ((Prä-)Annihilatoren)
7. Wiederholung Koordinatendarstellung und Identifikation K^{n*} mit K^n
8. Ausführungen zu Beispiel 21.3 (duale Abbildung der Koordinatenprojektion)

Vergleich LA I 2023 / 2025

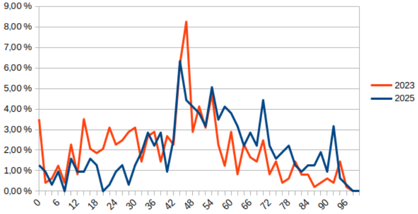
Median Punkte auf ÜB



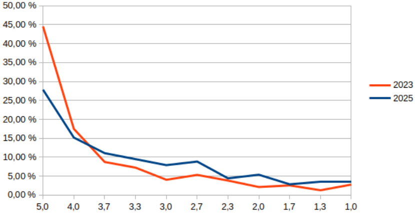
Personen mit Punkten auf Blättern 1-12



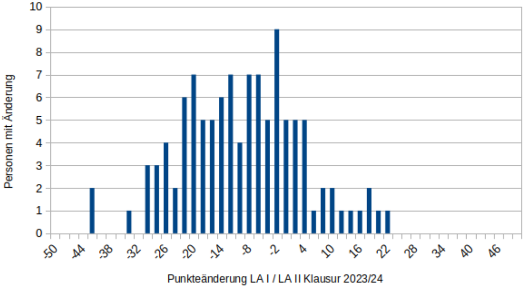
Punkteverteilung Endnote

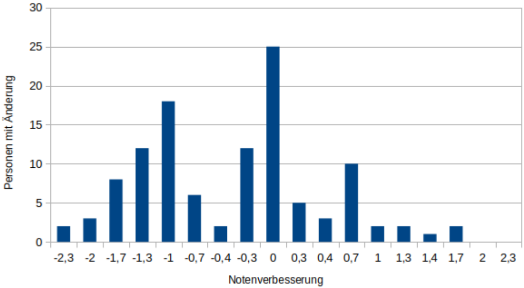


Notenverteilung Endnote



Vergleich Prüfungen LA I 2023 / LA II 2024





Schnitt: -13,7%
Punkte / 0,4 Note
Median: -11%
Punkte / 0,3 Note

LA I- und Wochenüberblick

Der Dualraum eines Vektorraumes

Definition 20.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Der Vektorraum

$$V^* := \mathrm{Homo}(V, K) = \{f\colon V \to K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der **(alg.) Dualraum** von V.

Die Elemente von V^* heißen **lineare Funktionale** auf V oder **Linearformen** auf V oder **Covektoren**.

Dimension eines Dualraumes

Satz 20.8 vgl. Satz 19.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Die Zuordnung

$$I_B \colon V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v_i \rangle_{i \in I} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über K mit Dualraum V^*. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ Basis von V, dann bilden $v_i^* \in V^*$, $i = 1, \ldots, n$ mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

die zu B **duale Basis** von V^*.

Koordinatenermittlung und Darstellung der dualen Paarung

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.
Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^*, dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, v \rangle \, v_i \qquad \text{und} \qquad v^* = \sum_{i=1}^{n} \langle v^*, v_i \rangle \, v_i^*$$

Lemma 20.14

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Dann gilt

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, v_i^* \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j \quad \Rightarrow \quad \langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, x_j = \xi^\mathsf{T} x$$

(Prä-)Annihilatoren

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Für $M \subseteq V$ heißt $M^0 := \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}$ der **Annihilator** von M.
2. Für $F \subseteq V^*$ heißt ${}^0F := \{v \in V \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\}$ der **Prä-Annihilator** von F.

Satz 20.23

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$.

1. Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von U^0.
2. Ist $(v_1^*, \ldots, v_k^*)$ eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von ${}^0F$.

Dualer Homomorphismus

Definition 21.1

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \mathrm{Homo}(V, W)$. Dann heißt $f^* \colon W^* \to V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f$$

der zu f **duale** oder **transponierte Homomorphismus**.
$v^* = w^* \circ f$ heißt der **Pullback** von w^* durch f.

$$\begin{tikzcd} K & W \arrow[l, "w^*"'] & V \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "v^*=w^*\circ f"] \end{tikzcd}$$

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. Jeder Vektorraum besitzt einen zu sich dualen Vektorraum.
2. Jeder Vektorraum ist isomorph zu einem Dualraum eines Vektorraumes.
3. Ist V unendlichdimensional mit Basis B, dann existiert in V^* die duale Basis B^*.
4. Jeder Unterraum ist Präannihilator eines Annihilators.

Bestimmen dualer Basen 1

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$. Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \quad , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \quad \right), \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \qquad , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \quad \right)$$

Bestimmen dualer Basen 2

Wir betrachten $(\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_4\}), \triangle, \cdot)$ mit der Basis $B = (\{x_1\}, \ldots, \{x_4\})$. Die duale Basis B^* hat die Darstellung

Duale Unterräume sind (nicht immer) Annihilatoren

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.
Dann gilt

$$F = ({}^0F)^0$$

für alle Unterräume Fvon V^* genau dann, wenn V (und V^*) endlichdimensional ist.

$\Leftarrow$:

$\Rightarrow$: Wir zeigen: Ist V unendlichdimensional, dann gibt es Unterräume von V^*, die kein Annihilator sind.

Beispiele und Aussagen zu Annihilatoren

Hausaufgabe II-1.4

1. Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{f \mapsto f(1)\}$ in $\mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Es seien V ein K-Vektorraum und W_1, W_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:
   (i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ (ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Dualer Homomorphismus 1

Was sind die dualen Abbildungen der folgenden Abbildungen?

1. $f: \mathbb{Q}^3 \in x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

2. $f: U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K

Dualer Homomorphismus 2

Beispiel 21.3

1. Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i \colon K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Koordinate.

Koordinatendarstellung und Dualräume

Dualer Homomorphismus 2 - nochmal

Beispiel 21.3

1. Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i \colon K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Koordinate.