Plenarübung Lineare Algebra II

(Inhalts)-Woche 01

Link zu diesen Folien

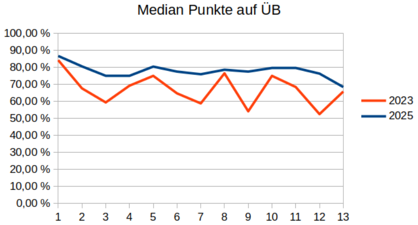
Organisatorisches

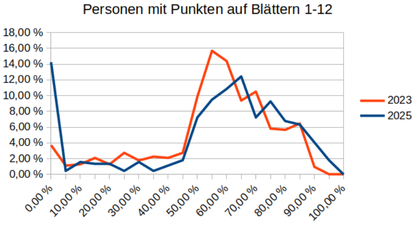
1. Bitte registrieren Sie sich:
    1. MÜSLI
    2. MaMpf
    3. Heico (1100111008 (VL) und 1100111009 (Übung))
2. Fragestunde Do 12:30 - 14:00 SR Statistik MKON
3. Anonyme Umfrage für Feedback, Themenwünsche und allgemeine Fragen

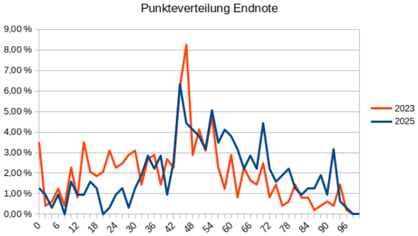
Das heutige Programm

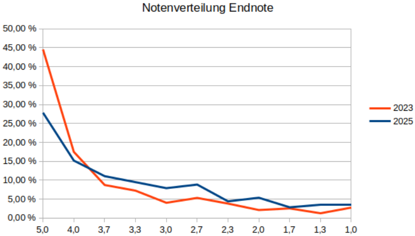
1. Ergebnisvergleich LA I / LA II
2. Wochenüberblick
3. Wochenwiederholung in 5 Folien:
   1. Dualräume
   2. Duale Basen
   3. (Prä-)Annihilatoren
   4. Duale Abbildungen
4. Kurzquiz
5. Ausführungen zum „Bestimmen einer dualen Basis“
6. Hausaufgabe II-1.4 ((Prä-)Annihilatoren)
7. Wiederholung Koordinatendarstellung und Identifikation K^{n*} mit K^n
8. Ausführungen zu Beispiel 21.3 (duale Abbildung der Koordinatenprojektion)

Vergleich LA I 2023 / 2025

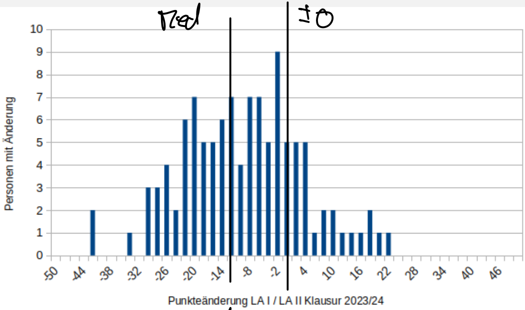


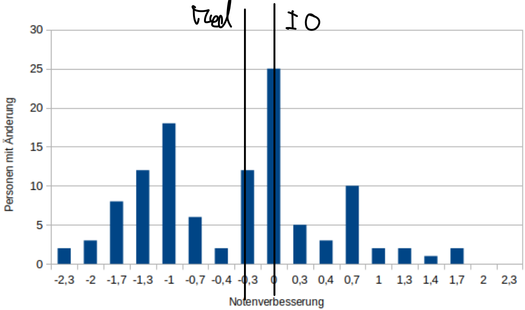






Vergleich Prüfungen LA I 2023 / LA II 2024





Schnitt: -13,7%

Punkte /-0,4 Note

Median: -11%

Punkte /-0,3 Note

LA I- und Wochenüberblick

Basics $\xrightarrow{\text{Ermöglichen}}$ (Halb-)Gruppen $\xrightarrow{\text{Weiterentwickelt}}$ Ringe / Körper

Vektorraum $(V,+,\cdot)$ über K

Basen / Dimension
Unterräume
Homomorphismen $\mathrm{HOM}(V,W)$
Faktorräume
Koordinatendarstellung
Basiswechsel

Dualität

Dualraum $V^* = \mathrm{HOM}(V,K)$
Kovektoren

"Duale Menge" B^* zu Basis $B \subseteq V$
l.u., erzeugend f.d.w. $\dim(V) \in \mathbb{N}$

Duale Basiswechsel

(Prä-)Annihilatoren

Duale Abbildung f^* zu $f \in \mathrm{HOM}(V,W)$
$\in \mathrm{HOM}(W^*, V^*)$

Der Dualraum eines Vektorraumes

Definition 20.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Der Vektorraum

Spezialfall $W=K$

$$V^* := \mathrm{Homo}(V, K) = \{f : V \to K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der **(alg.) Dualraum** von V.

Def. nutzt algebraische Eigenschaften

Die Elemente von V^* heißen **lineare Funktionale** auf V oder **Linearformen** auf V oder **Covektoren**.

Alternative wäre der topologische Dualraum

$v \in V$ $\quad$ $v^* \in V^*$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ Duale Paarung

$v^*(v)$

Dimension eines Dualraumes

Satz 20.8 Dimensionsaussage **vgl. Satz 19.6**

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Die Zuordnung

$$I_B : V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v_i \rangle_{i \in I} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

$V \cong K^I_\infty$

$V^* \cong K^I$

isomorph $\Leftrightarrow$ endlichdim.

Satz 20.10

Es sei V ein Vektorraum über K mit Dualraum V^*. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ Basis von V, dann bilden $v_i^* \in V^*$, $i = 1, \ldots, n$ mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

B^*

die zu B **duale Basis** von V^*.

$\{v^* \mid v \in B \subseteq V\} \subseteq V^*$ ist

- immer l.u.
- erzeugend $\Leftrightarrow$ V endlichdim.

Koordinatenermittlung und Darstellung der dualen Paarung

Satz 20.10 "Koordinatenermittlung"

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^*, dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, v \rangle \, v_i \quad \text{und} \quad v^* = \sum_{i=1}^{n} \langle v^*, v_i \rangle \, v_i^*$$

$V, B \to$ Koord.

$V^*, B^* \to$ Koord.

LGS

Lemma 20.14 Darst. der dualen Paarung in Koordinatensicht

Es sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und zugehöriger dualer Basis $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$. Dann gilt

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, v_i^* \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j \quad \Rightarrow \quad \langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, x_j = \xi^\mathsf{T} x$$

(Prä-)Annihilatoren

B: $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0][0\ \ 0\ \ 0]$ $\langle\ \rangle =: U$ $\langle\ \rangle = {}^0F$

B^*: $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0][0\ \ 0\ \ 0]$ $\langle\ \rangle =: F$ $\langle\ \rangle = U^0$

Definition 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Für $M \subseteq V$ heißt $M^0 := \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}$ der **Annihilator** von M.
2. Für $F \subseteq V^*$ heißt ${}^0F := \{v \in V \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\}$ der **Prä-Annihilator** von F.

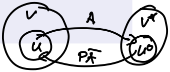
Trenner i.A. kein Komplement

Satz 20.23 Erklärt warum es natürlich ist, jetzt über diese Objekte zu sprechen.

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$.

1. Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von U^0.
2. Ist $(v_1^*, \ldots, v_k^*)$ eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von ${}^0F$.

Außerdem: $V \supseteq U = {}^0(U^0)$



Definition 21.1

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \mathrm{Homo}(V, W)$. Dann heißt $f^*\colon W^* \to V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f$$

der zu f **duale** oder **transponierte Homomorphismus**.
$v^* = w^* \circ f$ heißt der **Pullback** von w^* durch f.

verschiedene

$$\begin{tikzcd} K & W \arrow[l, "w^*"'] & V \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "v^*=w^*\circ f"] \end{tikzcd}$$

fixed

f^*

Kilod w^*

f^* Zeitmaschine

ein/wenig $w^* \in W^*$

passt Messwerkzeug an

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[dr] & & W^* \arrow[ll, "f^*"'] \arrow[dl] \\ & K & \\ V \arrow[ur, "\langle\cdot,\cdot\rangle_V"] \arrow[rr, "f"'] & & W \arrow[ul, "\langle\cdot,\cdot\rangle_W"'] \end{tikzcd}$$

passt Messgeräte an

viele v

Einstellungen

Mikrowelle

Kartoffel/Temperatur

Particify

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

https://partici.fi/06765060

1. Jeder Vektorraum besitzt einen zu sich dualen Vektorraum.
2. Jeder Vektorraum ist isomorph zu einem Dualraum eines Vektorraumes.
3. Ist V unendlichdimensional mit Basis B, dann existiert in V^* die duale Basis B^*.
4. Jeder Unterraum ist Präannihilator eines Annihilators.

Bestimmen dualer Basen 1

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$
Die dualen Basen sind

$$B^* = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y\right)}_{\text{Koordinatenmuster}}, \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x-y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = xe_1 + y_2 e_2 = xe_1 + y(-e_1 + (e_1 + e_2)) = (x-y)e_1 + y(e_1 + e_2)$$

Wir suchen also die Darstellung von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzgl. (e_1, e_1+e_2) bzw $\widehat{B}$ ← Koordinatenabbildung

— " — $\widehat{B}^*$ bzg B^*

$$T_{\widehat{B} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \text{Koord von } e_1 & \text{Koord von } e_2 \\ \text{bzgl. } \widehat{B} & \text{bzgl. } \widehat{B} \end{pmatrix} = T_{B \leftarrow \widehat{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(T_{\widehat{B}^* \leftarrow B^*}\right)^T$$

Bestimmen dualer Basen 2

über $\mathbb{Z}_2$

Wir betrachten $(\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_4\}), \triangle, \cdot)$ mit der Basis $B = (\{x_1\}, \ldots, \{x_4\})$. Die duale Basis B^* hat die Darstellung

$$B^* = \{ v_i^* \mid v_j \to \delta_{ij} \,,\ i,j \in [\![1,4]\!] \}$$

$$= \{ v_i^* : M \longmapsto \underbrace{\#(M \cap \{x_i\})}_{\in \mathbb{Z}_2} \mid i \in [\![1,4]\!] \}$$

$$M = (M \cap \{x_1\}) \triangle (M \cap \{x_2\}) \triangle (M \cap \{x_3\}) \triangle (M \cap \{x_4\})$$

Duale Unterräume sind (nicht immer) Annihilatoren

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.
Dann gilt

$$F = ({}^0F)^0$$

für alle Unterräume Fvon V^* genau dann, wenn V (und V^*) endlichdimensional ist.

$\Leftarrow$: Direkt mittels duale Basen

$\Rightarrow$: Wir zeigen: Ist V unendlichdimensional, dann gibt es Unterräume von V^*, die kein Annihilator sind.

$\dim V = \infty \Rightarrow \underbrace{\langle B^* \rangle}_{F :=} \neq V^*$ (1-Fkt). Gäbe es Menge $U \subseteq V$ mit $U^0 = F$, dann folgt

$U^0 = \langle U \rangle^0 = F \overset{VL}{\Rightarrow} \underbrace{{}^0(U^0)}_{= \langle U \rangle} = {}^0(F) = \{0\}$ aber $\{0\}^0 = V^* \neq F$ ↯

Beispiele und Aussagen zu Annihilatoren

Hausaufgabe II-1.4

$f = f(0)e_0 + f(1)e_1 + f(2)e_2$

1. Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{f \mapsto f(1)\}$ in $\mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Es seien V ein K-Vektorraum und W_1, W_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:
   (i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ (ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

$(A \cap B)^0 = A^0 \cup B^0$

① ${}^0\{f \mapsto f(1)\} = {}^0\langle \underbrace{f \mapsto f(1)} \rangle = {}^0\langle e_1^* \rangle = \langle \underbrace{e_0, e_2}_{\text{Basis}} \rangle$

$\subseteq$ Basis ergänzen Stelle M.L.

② (i) „$\subseteq$" $f \in (W_1 + W_2)^0 \Rightarrow f(\underset{\in W_1}{w_1}) = f(\underbrace{w_1 + 0}_{W_1 + W_2}) = 0$ und analog $f(\underset{\in W_2}{w_2}) = f(\underbrace{0 + w_2}_{\in W_1 + W_2}) = 0$

„$\supseteq$" $f \in W_1^0 \cap W_2^0 \Rightarrow f(\underset{\in W_1}{w_1} + \underset{\in W_2}{w_2}) = f(w_1) + f(w_2) = 0 + 0 = 0$

Was sind die dualen Abbildungen der folgenden Abbildungen?

1. $f : \mathbb{Q}^3 \in x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

$$f^*(\underbrace{\omega^*}_{\in (\mathbb{Q}^3)^* = \mathbb{Q}^{3*}})(v) = \omega^*(f(v)) = \omega^*(\lambda v) = (\lambda \omega^*)(v)$$

$$f^*(\omega^*) = \lambda \omega^*$$

2. $f : \underline{U} \ni u \mapsto \underline{u \in V}$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K

$$f^*(v^*)(u) = v^*(f(\underset{\in U}{u})) = \underset{\in V^*}{v^*}(\underset{\in V}{u}) = (\underset{U^*}{v^*|_U})(\underset{\in U}{u})$$

Dual zur Einbettung ist die Einschränkung.

Beispiel 21.3

$V \quad W$

1. Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i \colon K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Koordinate. $\pi_i \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_i \in K$

$$\pi_i^*(w^*)(v) = ?$$
$$\shortparallel$$
$$\langle \pi_i^*(w^*), v \rangle$$

Koordinatendarstellung und Dualräume

S-VR

$$
\begin{tikzcd}
K^n & & K^m \arrow[ll, "f_{M_{f^*}}"'] \\
V^* = K^{n*} \arrow[u, "\Phi^{-1}_{B_V^*} = S_1^*"] \arrow[dr, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] & & W^* = K^* \arrow[ll, "f^* = \pi_i^*"'] \arrow[u, "\Phi^{-1}_{B_W^*} = S_1^*"'] \arrow[dl] \\
& K & \\
V = K^n \arrow[ur] \arrow[rr, "f = \pi_i"] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{B_V} = S_n"'] & & W = K \arrow[ul, "\langle\cdot,\cdot\rangle"'] \arrow[d, "\Phi^{-1}_{B_W} = S_1"] \\
K^n \arrow[rr, "f_{M_f} = \pi_i"'] & & K^m = K
\end{tikzcd}
$$

SVR

statt f^*, gebe Verhalten von $f_{M_{f^*}}$ an.

$v \longmapsto v_i$

$x \longmapsto x_i$

$x \in K^n$, $x_i \in K$

$\boxed{(0\,0\,0\,1\,0\,\cdots)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i$

Beispiel 21.3

1. Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i : K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Koordinate.

$\pi_i^*: K^* \to (K^n)^*$

$\hat{=} K \qquad \hat{=} K^n$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$\phi_{S_1^*} \qquad \phi_{S_n^*}$

$v = \phi_{S_n}(x), \; w^* = \phi_{S_1^*}(\alpha)$

Lemma 20.14

$\langle \pi_i^*(w^*), v \rangle_{K^n} = \left[\phi_{S_n^*}^{-1}(\pi_i^*(w^*))\right]^T \underbrace{\phi_{S_n}^{-1}(v)}_{x} = \left[f_{M_{\pi_i^*}} \left(\underbrace{\phi_{B_1^*}^{-1}(w^*)}_{\alpha} \right) \right]^T x$

$\shortparallel$

$\langle w^*, \pi_i(v) \rangle_{K^1} = \alpha^T \cdot x_i \quad \forall x \in K^n$ bzw $v \in K^n$

$\overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Stelle i