R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Hausaufgabe II - 8

Ausgabedatum: 1. Juni 2026
Abgabedatum: 8. Juni 2026

Hausaufgabe II-8.1 (Eigenwerte der dualen Abbildung) 3 + 4 = 7 Punkte

(a) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und f ein V-Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f und f^* die gleichen Eigenwerte besitzen, und dass sogar $\dim(\operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id})) = \dim(\operatorname{Kern}(f^* - \lambda \operatorname{id}^*))$ für alle $\lambda \in K$.

(b) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Linksshift, also $f(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots)$. Zeigen Sie, dass jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f ist, aber f^* keinen Eigenwert besitzt.

Hausaufgabe II-8.2 (Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen) 1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \operatorname{Endo}(V)$ sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie Lemma 33.6 also die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_V - f)$ ist ein Unterraum von V.

(b) $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $f \Leftrightarrow \mu^{\text{geo}}(f, \lambda) > 0$.

(c) $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die (evtl. leere) Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.

(d) Sind $s \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1), \dots, \operatorname{Eig}(f, \lambda_2)$ direkt.

Hausaufgabe II-8.3 (Eigenwerte, -vektoren und -räume) 2.5 + 2.5 + 2 + 1 = 8 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume der folgenden reellen Matrizen.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Beachte: Wir haben noch keine Methodik, um Eigenwerte von Endomorphismen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen zu bestimmen. Die obigen Beispiele lassen sich mit der Definition und schon bekannten Argumenten behandeln.

(b) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $S_l, S_r : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Links- bzw. Rechtsshift, also $S_l(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots)$ und $S_r(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (0, x_1, x_2, \dots)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und deren geometrischen Vielfachheiten von S_l, S_r sowie $S_l + S_r$. **Hinweis:** Sie dürfen das Wissen aus Hausaufgabe II-8.1 voraussetzen.

(c) Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus eines nichttrivialen Vektorraums[GM] als einzigen Eigenwert die Null hat.

(d) Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{Endo}(V)$. Zeigen Sie, dass wenn $f^2 + f$ den Eigenwert -1 hat, dann hat f^3 den Eigenwert 1.