R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Hausaufgabe II - 7

Ausgabedatum: 25. Mai 2026
Abgabedatum: 1. Juni 2026

Hausaufgabe II-7.1 (Basics zu Algebren) 1 + 1 + 4 = 6 Punkte

(a) Entscheiden Sie, ob $2\mathbb{Z}$ eine $\mathbb{Z}$-Algebra ist, und falls ja, ob diese unitär ist und ob diese ein Einselement hat.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Algebra A und eines Untermoduls $U \subseteq A$, der keine Unteralgebra von A ist, an.

(c) (i) Es sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot, \cap)$ eine $\mathbb{Z}_2$-Algebra ist. Ist diese mit Eins, unitär, kommutativ?

(ii) Bestimmen Sie alle Unteralgebren im Fall $X = [\![1, 3]\!]$.

(iii) Bestimmen Sie alle Elemente der Faktoralgebra $\mathcal{P}([\![1, 3]\!]) \,/\, \langle\{2\}\rangle$ (wobei hier der erzeugte Unterraum gemeint ist).

Hausaufgabe II-7.2 (Polynome über der Potenzmengenalgebra und Einsetzung) 2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte

Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ der bekannte kommutative Ring mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement X. Wir untersuchen nun die Polynomalgebra $(\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap, \cap)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade 0 und 1.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade $n \geqslant 2$.

(c) Bestimmen Sie den Kern des Ringhomomorphismus

$$\Phi\colon (\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap) \ni p \mapsto p \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \triangle, \cap),$$

der ein Polynom auf die zugehörige Polyomfunktion abbildet.

(d) Berechnen Sie $p\left(\llbracket 1, 10 \rrbracket\right)$ für $X = \mathbb{Z}$ und

$$p = \mathop{\triangle}_{i=1}^{3} (2^i \mathbb{N}) \cap t^i.$$

Hausaufgabe II-7.3 (Spezielle Zerlegung reeller Polynome) 4 Punkte

Es sei $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ (und damit auch $p \in (\mathbb{C}[t], +, \cdot)$). Zeigen Sie:

(a) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, und die Vielfachheit von λ und $\bar{\lambda}$ stimmt überein.

(b) Ist $\deg(p) \geqslant 1$, dann existiert eine Zerlegung $p = q(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \dots g_\ell$ mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ sowie reellen quadratischen Polynomen $g_1, \dots, g_\ell$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\deg(p) = k + 2\,\ell$.

(c) Ist $\deg(p)$ ungerade, dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Hausaufgabe II-7.4 (Polynomdivision) 1 Punkte

Nutzen Sie Polynomdivision, um zu zeigen, dass $p = t^2 + 1$ kein Teiler von $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ist.