

## HAUSAUFGABE II - 7 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 25. Mai 2026

Abgabedatum: 1. Juni 2026

### Hausaufgabe II-7.1 (Basics zu Algebren)

1 + 1 + 4 = 6 Punkte

- (a) Entscheiden Sie, ob  $2\mathbb{Z}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Algebra ist, und falls ja, ob diese unitär ist und ob diese ein Einselement hat.
- (b) Geben Sie ein Beispiel einer Algebra  $A$  und eines Untermoduls  $U \subseteq A$ , der keine Unter- algebra von  $A$  ist, an.
- (c) (i) Es sei  $X$  eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$  eine  $\mathbb{Z}_2$ -Algebra ist. Ist diese mit Eins, unitär, kommutativ?  
(ii) Bestimmen Sie alle Unteralgebren im Fall  $X = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .  
(iii) Bestimmen Sie alle Elemente der Faktoralgebra  $\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket) / \langle \{2\} \rangle$  (wobei hier der erzeugte Unterraum gemeint ist).

### Lösung.

- (a) Da  $2\mathbb{Z}$  ein Ideal in  $\mathbb{Z}$  ist, handelt es sich um einen Untermodul und einen Unterring und damit um eine Unter- algebra von  $\mathbb{Z}$  über sich selbst, und somit eine Algebra. (1 Punkt)
- (b) Die Matrixalgebra  $K^{2 \times 2}$  über einem Körper  $K$  hat den Untermodul/Untervektorraum

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(die lineare Hülle der Permutationsmatrix) wo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zeigt, dass der Unterraum nicht unter Ringmultiplikation abgeschlossen ist.

Alternativ sind die Polynome  $K[t]$  eines beliebigen Höchstgrads ungleich 0 ein Unterraum aber kein Unterring und damit auch keine Unter algebra der Algebra der Polynome.  
(1 Punkt)

- (c) (i) Dass es sich bei  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$  um einen  $\mathbb{Z}_2$  Vektorraum handelt haben wir in Hausaufgabe I-8.1 nachgewiesen und dass  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$  einen Ring ergibt ist ebenfalls teil der Übungsaufgaben gewesen, es bleibt also die Verträglichkeit der Ringverknüpfung zu prüfen.

Dabei gilt für  $A, B \subseteq X$

$$(0 \cdot A) \cap B = 0 \cdot (A \cap B) = A \cap (0 \cdot B)$$

weil jeder Term die leere Menge ist und

$$(1 \cdot A) \cap B = 1 \cdot (A \cap B) = A \cap (1 \cdot B)$$

weil jeder Term  $A \cap B$  ist.

Unitär ist die Algebra, denn der Körper hat natürlich eine S-multiplikativ neutrale Eins. Außerdem hat die Algebra eine Ringeins, nämlich gerade die Menge  $X$ .

(1 Punkt)

- (ii) Wir haben hier einen dreidimensionalen Vektorraum über einem Körper mit 2 Elementen, dieser hat also  $2^3 = 8$  Elemente, nämlich

$$\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Alle seine Unterräume haben Dimension zwischen 0 und 3, wobei genau die beiden Randfälle die trivialen Unterräume sind.

Die Unterräume der Dimension 1 haben dann gerade  $2^1$  Elemente, von denen eines der Nullvektor  $\emptyset$  ist und das andere ein (additiv selbstinverses) beliebiges anderes Element ist, wir haben also genau 7 solcher Unterräume, die als  $\{\emptyset, A \mid A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\}$  zusammengefasst werden können.

Unterräume der Dimension 2 haben eine Basis  $\{A, B\}$  mit zwei verschiedenen  $A, B \neq \emptyset$  und gerade  $2^2 = 4$  Elemente, also genau die Form  $\{\emptyset, A, B, A \Delta B \mid A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, A \neq B\}\}$ . Hat genau einer der Vektoren im Unterraum Kardinalität 2, dann gibt es ein Maximum bezüglich der Teilmengeninklusion und die verbleibenden Vektoren bilden eine disjunkte Zerlegung des Maximums. Der Fall, dass genau zwei Vektoren die Kardinalität 2 haben kann nicht auftreten, und es verbleibt lediglich der Fall, dass neben der leeren Menge genau die Mengen der Kardinalität zwei im Unterraum liegen.

Für all diese Unterräume bleibt die Unterringeigenschaft zu prüfen. Die Unterräume der Dimension 0, 1 und 3 sind offensichtlich Unterringe, denn alle möglichen Schnitte sind führen auf die leere Menge (Fall 0 und 1) oder liegt die gesamte Menge vor (Fall 3). Im Fall von Dimension 2 mit Maximum bilden die beiden verbleibenden nichttrivialen Vektoren eine disjunkte Zerlegung und alle Schnitte ergeben die leere Menge oder es werden Elemente geschnitten, die bezüglich der Inklusionshalbordnung vergleichbar sind, hier liegt also Abgeschlossenheit und damit die Unterringeigenschaft vor.

Bis hier sind also alle besprochenen Unterstrukturen auch Unteralgebren.

Der verbleibende Unterraum  $U := \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$  ist allerdings kein Unterring, denn er ist nicht multiplikativ abgeschlossen, schließlich gilt ja  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin U$ . Dieser Unterraum ist also keine Unteralgebra. (2 Punkte)

(iii) Die Elemente von  $\mathcal{P}(\llbracket 1, 3 \rrbracket) / \langle \{2\} \rangle = \{Y \Delta \{\emptyset, \{2\}\} \mid Y \in \mathcal{P}(X)\}$  sind gerade die Elemente

$$\begin{aligned} \emptyset \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\emptyset, \{2\}\} \\ \{1\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{1\}, \{1, 2\}\} \\ \{2\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\emptyset, \{2\}\} \\ \{3\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{3\}, \{2, 3\}\} \\ \{1, 2\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{1\}, \{1, 2\}\} \\ \{1, 3\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \{2, 3\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{3\}, \{2, 3\}\} \\ \{1, 2, 3\} \Delta \{\emptyset, \{2\}\} &= \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

also

$$\{\{\emptyset, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{3\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\}.$$

(1 Punkt)

**Hausaufgabe II-7.2** (Polynome über der Potenzmengenalgebra und Einsetzung) 2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte

Es sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot, \cap)$  die  $\mathbb{Z}_2$ -Algebra mit dem Nullelement  $\emptyset$  und dem Einselement  $X$ . Wir untersuchen nun die Polynomalgebra  $(\mathcal{P}(X)[t], \Delta, \cdot, \cap)$ .

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade 0 und 1.
- (b) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade  $n \geq 2$ .

(c) Bestimmen Sie den Kern des Ringhomomorphismus

$$\Phi: (\mathcal{P}(X)[t], \Delta, \cap) \ni p \mapsto p \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \Delta, \cap),$$

der ein Polynom auf die zugehörige Polynomfunktion abbildet.

(d) Berechnen Sie  $p(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$  für  $X = \mathbb{Z}$  und

$$p = \bigtriangleup_{i=1}^3 (2^i \mathbb{N}) \cap t^i.$$

**Lösung.**

(a) Polynome vom Grad 0 sind konstant und nicht das Nullpolynom, sie haben also die Form  $p = a_0$  mit  $a_0 \neq \emptyset$ , sie haben also keine Nullstellen. (0.5 Punkte)

Polynome vom Grad 1 haben die Form  $p = a_0 \Delta (a_1 \cap t)$ . Ein  $t \in \mathcal{P}(X)$  erfüllt also  $p(t) = \emptyset$  genau dann, wenn  $a_0 = a_1 \cap t$  gilt. Hier ergeben sich also drei Fälle (wobei Fall 1 strenggenommen von Fall 2 abgedeckt wird, er ist hier wegen leicht besonderer Struktur nochmal separat aufgeführt):

- (i) Ist  $a_0 = a_1$ , dann sind die Nullstellen genau die Obermengen  $\{t \in \mathcal{P}(X) \mid t \supseteq a_0\} = \{a_0 \cup a \mid a \in \mathcal{P}(X \setminus a_1)\}$ . (0.5 Punkte)
- (ii) Ist  $a_0 \subsetneq a_1$ , dann sind die Nullstellen gerade gegeben durch  $\{a_0 \cup a \mid a \in \mathcal{P}(X \setminus a_1)\}$ . (0.5 Punkte)
- (iii) Andernfalls beinhaltet  $a_0$  ein Element, das nicht in  $a_1$  und damit auch für jedes  $t \in \mathcal{P}(X)$  nicht in  $a_1 \cap t$  liegt. Es existieren also keine Nullstellen. (0.5 Punkte)

(b) Für alle Monome  $t^i$  mit  $i \geq 1$  entspricht die zugehörige Polynomfunktion dem  $i$ -fachen Schneiden jedes Auswertungsobjekts mit sich selbst, also der Identität, also der Polynomfunktion des Monoms  $t^1$ . Es ist also der Ringhomomorphismus

$$\Phi: (\mathcal{P}(X)[t], +, \cdot) \ni p \mapsto p \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \Delta, \cap)$$

der Polynome auf ihre jeweiligen Polynomfunktionen gegeben durch

$$\Phi \left( \bigtriangleup_{i=0}^n a_i \cap t^i \right) = a_0 \Delta ((a_1 \Delta \cdots \Delta a_n) \cap t) = a_0 \Delta \left( \bigtriangleup_{i=1}^n a_i \right) \cap t = \Phi \left( a_0 \Delta \left( \bigtriangleup_{i=1}^n a_i \right) \cap t \right).$$

Da die Nullstellen eines Polynoms über Ihre Polynomfunktion definiert sind und alle Polynomfunktionen genau die Polynomfunktionen von Polynomen ersten Grades sind,

haben wir mit der vorherigen Teilaufgabe schon die gesamte Struktur der Nullstellen von Polynomen über diesem Ring verstanden. Lediglich tritt an die Stelle von dem bisherigen  $a_1$  nun  $\bigtriangleup_{i=1}^n a_i$ , also die Menge genau der Elemente aus  $X$ , die in einer ungeraden Anzahl der Koeffizienten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  enthalten sind. (1 Punkt)

- (c) Der Kern des Ringhomomorphismus sind alle Polynome, deren Polynomfunktion die Nullfunktion (Funktion, die konstant die leere Menge ausgibt) ist. Insbesondere muss die Auswertung an der leeren Menge selbst wieder die leere Menge sein, also

$$\emptyset = \Phi \left( \bigtriangleup_{i=0}^n a_i \cap t^i \right) (\emptyset) = \Phi \left( a_0 \triangle \left( \bigtriangleup_{i=1}^n a_i \right) \cap t \right) (\emptyset) = a_0$$

gelten. Das Gleiche muss weiterhin für die Auswertung an  $X$  gelten, also

$$\emptyset = \Phi \left( a_0 \triangle \left( \bigtriangleup_{i=1}^n a_i \right) \cap t \right) (X) = \bigtriangleup_{i=1}^n a_i$$

gelten. Das ist dann auch hinreichend dafür, dass für jedes beliebige andere  $t \in \mathcal{P}(X)$  die leere Menge rauskommt. Der Kern ist also die Menge aller Polynome ohne konstanten Koeffizienten, für die kein Element existiert, welches in einer ungeraden Anzahl der Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  vorkommt:

$$\text{Kern}(\Phi) = \left\{ \bigtriangleup_{i=1}^n a_i \cap t^i \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge \left( \bigtriangleup_{i=1}^n a_i = \emptyset \right) \right\}.$$

(1 Punkt)

- (d) Wie oben ausgeführt ist

$$p = \Phi(p) = \bigtriangleup_{i=1}^3 (2^i \mathbb{N}) \cap t^i = \left( \bigtriangleup_{i=1}^3 (2^i \mathbb{N}) \right) \cap t = (2\mathbb{N} \triangle 4\mathbb{N} \triangle 8\mathbb{N}) \cap t.$$

Klar ist, dass  $i\mathbb{N}$  jeweils die natürlichen Zahlen liefert, die von  $i$  geteilt werden. In der großen symmetrischen Differenz verbleiben also alle geraden Zahlen, die von einer ungeraden Anzahl der Zahlen 2, 4, 8 geteilt werden, also

$$2\mathbb{N} \triangle 4\mathbb{N} \triangle 8\mathbb{N} = (2\mathbb{N} \setminus 4\mathbb{N}) \triangle 8\mathbb{N} = (2\mathbb{N} \setminus 4\mathbb{N}) \cup 8\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \setminus (4 + 8\mathbb{N}),$$

also jede zweite natürliche Zahl und zusätzlich alle Vielfachen von 8. Schneiden wir diese Menge nun mit den natürlichen Zahlen in  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ , dann ist letztendlich  $p(\llbracket 1, 10 \rrbracket) = \{2, 6, 8, 10\}$ . (1 Punkt)

**Hausaufgabe II-7.3** (Spezielle Zerlegung reeller Polynome)

4 Punkte

Es sei  $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$  (und damit auch  $p \in (\mathbb{C}[t], +, \cdot)$ ). Zeigen Sie:

- (a) Wenn  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$  ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$ , und die Vielfachheit von  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  stimmt überein.
- (b) Ist  $\deg(p) \geq 1$ , dann existiert eine Zerlegung  $p = q(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \dots g_\ell$  mit Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}$  sowie reellen quadratischen Polynomen  $g_1, \dots, g_\ell$  ohne Nullstellen in  $\mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\deg(p) = k + 2\ell$ .
- (c) Ist  $\deg(p)$  ungerade, dann besitzt  $p$  mindestens eine reelle Nullstelle.

**Lösung.**

Es sei  $p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$ .

- (a) Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist dann

$$p(\bar{z}) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (\bar{z})^i = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \overline{z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \cdot z^i = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \cdot z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \cdot z^i} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i \cdot z^i} = \overline{p(z)}.$$

Dabei ist die rot markierte Gleichheit nur gültig, weil  $a_i = \overline{a_i}$  für die reellen Koeffizienten gilt. Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  also eine Nullstelle von  $p$ , dann ist

$$p(\bar{\lambda}) = \overline{p(\lambda)} = \overline{0} = 0.$$

(1 Punkt)

Um zu zeigen, dass die Vielfachheiten übereinstimmen, werden wir schon die Form der Zerlegung in der folgenden Teilaufgabe weitestgehend herleiten.

Ist  $p$  konstant, dann ist  $p$  entweder das Nullpolynom oder hat keine Nullstellen, hier ist nichts zu zeigen. Ist nun  $\deg(p) \geq 1$ , dann wissen wir, auf Grund von Satz 31.12, dass eine (eindeutige) Zerlegung

$$p = q(t - \tilde{\lambda}_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (t - \tilde{\lambda}_s)^{n_s} \tag{0.1}$$

existiert, bei der die  $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$  gerade die Nullstellen von  $p$  und die  $n_i$  die Vielfachheiten der Nullstellen sind, sowie dass  $q \in \mathbb{C}[t]$  keine Nullstellen hat (also konstant ist). Da  $q$  gerade der Koeffizient zur höchsten Potenz in  $p$  ist, muss auch außerdem  $q$  reell sein. In der obigen Zerlegung stehen also sowohl die reellen als auch die echt komplexen Nullstellen in der Zerlegung und wir wissen, dass zu jeder echt komplexen Nullstellen in der Zerlegung auch ihre komplex konjugierten Zahlen auftreten. Es verbleibt also nur noch zu zeigen, dass die Vielfachheiten der Nullstellen übereinstimmen.

Da jede reelle Nullstelle mit ihrer komplex konjugierten übereinstimmt, stimmen für alle reellen Nullstellen natürlich die Vielfachheiten der jeweils komplex Konjugierten überein. Lösen wir nun die Vielfachheiten der reellen Nullstellen explizit in Linearfaktoren auf, dann erhalten wir das Produkt der Linearfaktoren  $(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k)$  in der alle reellen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit vertreten sind.

Für jede echt komplexe Nullstelle  $\tilde{\lambda} \in \{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_s\} \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  treten die beiden Terme  $(t - \tilde{\lambda})$  und  $(t - \bar{\tilde{\lambda}})$  in der Zerlegung auf, deren Produkt das *reelle*, quadratische Polynom

$$(t - \tilde{\lambda}) \cdot (t - \bar{\tilde{\lambda}}) = t^2 - \underbrace{(\tilde{\lambda} + \bar{\tilde{\lambda}})}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{\tilde{\lambda} \cdot \bar{\tilde{\lambda}}}_{\in \mathbb{R}}$$

ergeben.

Für jedes paarweise Vorliegen der komplexen Linearfaktoren erhalten wir also ein quadratisches reelles Polynom, wenn wir die gemeinsamen Vielfachheiten der komplexen Linearfaktoren also auflösen erhalten wir aus unserer ursprünglichen Darstellung die Darstellung

$$p = \underbrace{q(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \dots g_\ell}_{=: \tilde{p} \in \mathbb{R}[t]} \cdot (t - \tilde{\lambda}_{i_1})^{d_1} \dots (t - \lambda_{i_m})^{d_m}, \quad (0.2)$$

wo die hinteren Linearfaktoren zu den  $\tilde{\lambda}_{i_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  mit den entsprechenden Vielfachheiten gerade zu den komplexen Nullstellen gehören, bei denen die Vielfachheiten der konjugierten Paare nicht übereinstimmen. Wenn wir nun Satz 31.3 zur Polynomdivision in  $\mathbb{R}[t]$  auf die reellen Polynome  $p$  und  $\tilde{p}$  anwenden, dann erhalten wir die Zerlegung

$$p = \tilde{p} \cdot \tilde{q} + r$$

mit  $\tilde{q} \in \mathbb{R}[t]$ . Da diese Zerlegung aber auch eine Zerlegung in  $\mathbb{C}[t]$  ist und diese eindeutig, muss sie mit der in (0.2) übereinstimmen, also  $r = 0$  und  $\tilde{q} = (t - \tilde{\lambda}_{i_1})^{d_1} \dots (t - \lambda_{i_m})^{d_m}$  sein. Da  $\tilde{q}$  aber ein reelles Polynom ist, in dem keine komplexe Nullstelle paarweise mit ihrer konjugierten auftritt, liegen keine komplexen Nullstellen vor,  $\tilde{q}$  muss also 1 sein, alle Vielfachheiten stimmen also überein. (2 Punkte)

- (b) Die quadratischen Polynome aus der Darstellungen der letzten Teilaufgabe sind gerade von der Form  $(t - \lambda) \cdot (t - \bar{\lambda}) = t^2 - \underbrace{(\lambda + \bar{\lambda})}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{\lambda \cdot \bar{\lambda}}_{\in \mathbb{R}}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Deren Nullstellen in

$\mathbb{C}$  sind eindeutig auf  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  festgelegt, sie haben hat es keine reellen Nullstellen. Der Grad des Polynoms ist direkt ablesbar. (0.5 Punkte)

- (c) Aus dem eben hergeleiteten Darstellung können wir sofort folgern, dass alle reellen Polynome, die nur komplexe Nullstellen haben, geraden Grad haben müssen. (0.5 Punkte)

**Hausaufgabe II-7.4** (Polynomdivision)

1 Punkte

Nutzen Sie Polynomdivision, um zu zeigen, dass  $p = t^2 + 1$  kein Teiler von  $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$  in  $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$  ist.

**Lösung.**

Anwendung der Polynomdivision mit Rest auf die Eingangspolynome  $p = t^2 + 1$  und  $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$  liefert

$$\begin{array}{r} t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4 = (t^2 + 1)(t^2 - t + 4) + 2t \\ \underline{- t^4 \qquad - t^2} \\ - t^3 + 4t^2 + t \\ \underline{t^3 \qquad + t} \\ 4t^2 + 2t + 4 \\ \underline{- 4t^2 \qquad - 4} \\ 2t \end{array}$$

also den Quotienten  $q_1 = (t^2 - t + 4)$  und den ersten Rest  $r_1 = (2t)$ , welcher ungleich Null ist. Nach Satz 31.3 ist die Darstellung in der Zerlegung eindeutig, entsprechend ist  $p$  kein Teiler von  $q$ . (1 Punkt)