

## HAUSAUFGABE II - 6

Ausgabedatum: 18. Mai 2026

Abgabedatum: 25. Mai 2026

**Hausaufgabe II-6.1** (Basis zu Polynomringen und -homomorphismen) 2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte

- (a) Bestimmen Sie alle Koeffizienten (und damit die Darstellung als Monomsumme) des Polynomprodukts

$$\left( \Delta_{i=1}^2 \llbracket 1, i \rrbracket t^{2i} \right) \cap \left( \Delta_{i=0}^2 \{2^i\} t^i \right)$$

im Polynomring  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})[t]$  über dem Ring  $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \Delta, \cap)$ .

- (b) Es sei  $(R, +, \cdot)$  ein Integritätsring. Bestimmen Sie die bzgl. der Polynommultiplikation invertierbaren Elemente des Polynomrings  $(R[t], +, \cdot)$ .
- (c) Es seien  $(R_1, +_1, \cdot_1)$  und  $(R_2, +_2, \cdot_2)$  zwei kommutative Ringe mit Eins und  $f: R_1 \rightarrow R_2$  ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R_1[t] &\rightarrow R_2[t] \\ \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot_1 t^i\right) &:= \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot_2 t^i \end{aligned}$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den entsprechenden Polynomringen  $(R_1[t], +_1, \cdot_1)$  und  $(R_2[t], +_2, \cdot_2)$  definiert ist.

- (d) Es sei  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$\begin{aligned} f: R[t] &\rightarrow R[t] \\ f\left(\sum_{i=0}^k a_i \cdot t^i\right) &:= \sum_{i=1}^k i a_i \cdot t^{i-1}, \end{aligned}$$

genannt die Ableitungsabbildung auf  $R[t]$ , ein Ringendomorphismus von  $(R[t], +, \cdot)$  in sich selbst ist.

**Hausaufgabe II-6.2** (Polynomgrad)

3 Punkte

Es sei  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $p, q \in R[t]$  zwei Polynome. Zeigen Sie [Lemma 28.10](#) des Skripts, also die folgenden Aussagen:

- (a)  $\deg(p + q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$ .
- (b)  $\deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$ .
- (c) Ist  $R$  nullteilerfrei, dann gilt sogar  $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$ .

Dabei sollen formal für  $n \in \mathbb{N}_0$  die Beziehungen  $\max\{n, (-\infty)\} = \max\{(-\infty), n\} = n$  gelten sowie  $\max\{(-\infty), (-\infty)\} = -\infty$  und  $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ .

**Hausaufgabe II-6.3** (Basics zu Moduln)

1 + 1 + 2 + 1 = 5 Punkte

- (a) Erklären Sie, wann ein  $R$ -Modul ein  $R$ -Vektorraum ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Untermoduln eines kommutativen Rings  $R$  über sich selbst. Was ist besonders, wenn  $R$  sogar ein Körper ist?
- (c) Bestimmen Sie alle  $n, m \in \mathbb{N}$ , für die  $n\mathbb{Z}$  mit den Ringverknüpfungen aus  $\mathbb{Z}$  ein Modul über dem Unterring  $m\mathbb{Z}$  von  $\mathbb{Z}$  ist und entscheiden Sie, wann es sich um unitäre Moduln handelt.
- (d) Erklären Sie, welche Moduln über dem Nullring existieren.

**Hausaufgabe II-6.4** (Basen, Synthese und Analyse in Moduln)

3 + 4 = 7 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

ein linear abhängiges Erzeugendensystem von  $\mathbb{Z}^2$  über  $\mathbb{Z}$  ist, welches keine Basis als Teilfamilie enthält.

- (b) Es sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  eine Familie von Vektoren aus  $M$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$R^n \ni \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n r_i v_i \in M$$

ein Modulhomomorphismus ist. Wann handelt es sich um einen Isomorphismus?