

## HAUSAUFGABE II - 5

Ausgabedatum: 11. Mai 2026

Abgabedatum: 28. Mai 2026

**Hausaufgabe II-5.1** (Determinante einer Dreiecksmatrix) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei  $K$  ein Körper und  $A \in K^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie [Lemma 27.9](#), also die folgenden Aussagen:

(a) Ist  $A \in K_{\swarrow}^{n \times n}$  oder  $A \in K_{\searrow}^{n \times n}$ , dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(b) Ist  $A$  eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  bzw.  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

**Beachte:** Es sollen nur Resultate und Techniken *vor* [Lemma 27.9](#) genutzt werden. Unterscheiden Sie in [Aussage \(b\)](#) den Fall von (ir-)regulären Matrizen und nutzen Sie die Eindeutigkeit der Determinantenformen.

**Hausaufgabe II-5.2** (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel) 2 + 2 + 2.5 + 2 = 8.5 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{6 \times 6}$$

(b) Die Zahlen 136, 561 und 986 haben 17 als gemeinsamen Teiler. Zeigen Sie, dass 17 auch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

teilt (ohne die Determinante einfach auszurechnen).

(c) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige  $n \in \mathbb{N}_0$  und bezüglich  $\mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(d) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine ganzzahlige Matrix. Zeigen Sie, dass  $A^{-1}$  genau dann ganzzahlig ist, wenn  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .

**Hausaufgabe II-5.3** (Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen) 3 Punkte

Es seien  $K$  ein Körper und  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ . Weiter seien  $f, g \in \text{Endo}(V)$ . Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen aus Lemma 27.22, also der folgenden Eigenschaften der Determinante von Endomorphismen:

- (a)  $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$  für alle  $\alpha \in K$ .
- (b)  $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \text{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$  Jede Darstellungsmatrix von  $f$  ist invertierbar.
- (c)  $\det(\text{id}_V) = 1$ .
- (d)  $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ .
- (e)  $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$ , falls  $f$  invertierbar ist.
- (f)  $\det(f^*) = \det(f)$ .

**Hausaufgabe II-5.4** (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums) 1.5 + 1 = 2.5 Punkte

(a) Es sei  $V$  ein Vektorraum mit  $\dim(V) \in \mathbb{N}$  über dem geordneten Körper  $K$ . Zeigen Sie, dass es genau zwei Äquivalenzklassen von gleichorientierten Basen gibt.

- (b) Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper  $K$  und  $V^*$  sein Dualraum. Weiter seien  $B_V$  und  $\widehat{B}_V$  Basen von  $V$  mit dazugehörigen dualen Basen  $B_V^*, \widehat{B}_V^*$  von  $V^*$ . Zeigen Sie, dass  $B_V$  und  $\widehat{B}_V$  genau dann gleichorientiert sind, wenn es  $B_V^*$  und  $\widehat{B}_V^*$  sind.