

HAUSAUFGABE II - 5 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 11. Mai 2026

Abgabedatum: 28. Mai 2026

Hausaufgabe II-5.1 (Determinante einer Dreiecksmatrix) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie [Lemma 27.9](#), also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K_{\nabla}^{n \times n}$ oder $A \in K_{\triangleleft}^{n \times n}$, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(b) Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ bzw. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Beachte: Es sollen nur Resultate und Techniken *vor* [Lemma 27.9](#) genutzt werden. Unterscheiden Sie in [Aussage \(b\)](#) den Fall von (ir-)regulären Matrizen und nutzen Sie die Eindeutigkeit der Determinantenformen.

Lösung.

(a) Wir zeigen den Fall $A \in K_{\nabla}^{n \times n}$, der Fall der unteren Dreiecksmatrix geht dann entsprechend analog bzw. folgt daraus, dass $\det(A) = \det(A^T)$. Per Definition ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \quad (27.3)$$

Falls es für ein $\sigma \in S_n$ einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\sigma(i) > i$ und damit $a_{\sigma(i),i} = 0$, ist diese Permutation nicht mehr an der Summenbildung beteiligt, da das Produkt der Matrixeinträge Null ist. Für jede Permutation, die an der Summe beteiligt ist, ist also $\sigma(i) \leq i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $i = 1$ folgt also $\sigma(1) = 1$ und so folgt schrittweise

$\sigma(i) = i$ für alle i . Die Summe in (27.3) besteht also aus einem einzigen Summanden, nämlich dem zur Identitätspermutation id_n mit $\sigma(i) = i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Deren Signum ist gerade 1 (0 ist eine gerade Anzahl von Vertauschungen), also gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = (\text{sgn } \text{id}_n) a_{11} \cdots a_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(2 Punkte)

- (b) Wir zeigen wieder den Fall der oberen Blockdreiecksmatrix, der Fall der unteren Blockdreiecksmatrix folgt entsprechend analog. Dafür seien nun erstmal $A_{11} \in K^{n_1 \times n_1}$ und $A_{22} \in K^{n_2 \times n_2}$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + n_2 = n$.

Wir stellen fest, dass A genau dann regulär ist, wenn A_{11} und A_{22} regulär sind. Dass Regularität von A auch Regularität der Teilmatrizen impliziert sieht man direkt daran, dass die Zeilen und Spalten von A ja dann linear unabhängig sind, also auch die Zeilen/Spalten der Teilmatrizen (gerade weil wir den Nullblock haben). Die Rückrichtung ist auf Grund des Nullblocks links unten in der Matrix ebenfalls klar. Der Fall, dass $\det(A) = 0 = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22})$, ist also abgedeckt. (1 Punkt)

Sind A und beide Teilmatrizen A_{11}, A_{22} regulär, dann definieren wir die Abbildung

$$\tilde{\Delta}: K^{n_1 \times n_1} \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \tilde{\Delta}(\underbrace{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n}_{\tilde{A}}) := \det \begin{pmatrix} \tilde{A} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Diese ist nun eine Determinantenform auf $K^{n_1 \times n_1}$, entsprechend gilt

$$\tilde{\Delta}(A_{11}) = \det(A_{11}) \tilde{\Delta}(I_{n_1}) = \det(A_{11}) \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Wiederholen wir das Argument für die Matrix $\begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ im unteren rechten Block, dann folgt

$$\tilde{\Delta}(A_{11}) = \det(A_{11}) \tilde{\Delta}(I_{n_1}) = \det(A_{11}) \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \underbrace{\det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}}_{=1},$$

wobei das letzte Argument **Aussage (a)** verwendet.

(2 Punkte)

Hausaufgabe II-5.2 (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel) 2 + 2 + 2.5 + 2 = 8.5 Punkte

- (a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{6 \times 6}$$

(b) Die Zahlen 136, 561 und 986 haben 17 als gemeinsamen Teiler. Zeigen Sie, dass 17 auch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

teilt (ohne die Determinante einfach auszurechnen).

(c) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und bezüglich \mathbb{R}

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(d) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine ganzzahlige Matrix. Zeigen Sie, dass A^{-1} genau dann ganzzahlig ist, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Lösung.

- (a) (i) Die Matrix ist vollbesetzt und mit 4×4 schon recht groß, hier helfen also die Leibniz-Darstellung und Merkgeln nicht mehr. Entweder zieht man die Laplace-Entwicklung sauber durch (weil die dann entstehenden Submatrizen noch die Sarrus-Regel zulassen) oder man bringt die Matrix in ZSF und nutzt die einfache Determinantenstruktur von Dreiecksmatrizen. Bei diesem Ansatz kann man auch aufhören zu rechnen, wenn man einfache Struktur erreicht hat, also wenn man eine Null auf der Diagonalen (und unter diesem Eintrag) erhält, wenn man Blockdreiecksstruktur erreicht hat, etc. Dieser Ansatz ist also vorzuziehen und allgemein anwendbar, auch bei noch größeren Matrizendimensionen.

Die Zeilenstufenformtransformationen liefern die Zwischenresultate

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

An dieser Stelle brechen wir ab und berechnen die Determinante aus dem Blockdiagonalresultat von [Hausaufgabe II-5.1](#) bzw. [Lemma 27.9](#) als $1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = 1$.

Beachte: Hätten wir Zeilen oder Spalten vertauscht, dann müssten wir evtl. das Vorzeichen der Determinante anpassen. (1 Punkt)

(ii) Mit dem (Block-)dreiecksresultat aus [Hausaufgabe II-5.1](#) bzw. [Lemma 27.9](#) kann man direkt ablesen, dass die Determinante $a^3 c^3$ sein muss. (1 Punkt)

(b) Wie wir wissen, dürfen wir Vielfache von Spalten auf andere Spalten addieren, ohne die Determinante zu verändern, wir können also das 10-fache der zweiten und das 100-fache der ersten Spalte auf die letzte addieren und erhalten mit den ganzen Zahlen $n_1 := \frac{136}{17}$, $n_2 := \frac{561}{17}$ und $n_3 := \frac{986}{17}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 36 \\ 5 & 6 & 61 \\ 9 & 8 & 86 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 136 \\ 5 & 6 & 561 \\ 9 & 8 & 986 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 17 \cdot n_1 \\ 5 & 6 & 17 \cdot n_2 \\ 9 & 8 & 17 \cdot n_3 \end{pmatrix} = 17 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & n_1 \\ 5 & 6 & n_2 \\ 9 & 8 & n_3 \end{pmatrix},$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Multilinearität der Determinante verwendet haben. Nun muss man nur noch an der Definition der Determinanten ablesen, dass ganzzahlige Matrizen auch ganzzahlige Determinanten haben und ist fertig. (2 Punkte)

(c) Für $n = 0$ ist die Aussage klar, denn hier hat die Matrix nur einen Eintrag (den Eintrag 1), der auch ihre Determinante ist. Das Produkt ist leer, also 1. (0.5 Punkte)

Für den Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ betrachten wir nun die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \dots & \dots & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} & \dots & \dots & x_{n+2}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Ohne die Determinante der Matrix zu verändern können wir Vielfache von Zeilen und Spalten von anderen abziehen. Wir ziehen das x_1 -fache

- (i) der vorletzten Spalte von der letzten Spalte
- (ii) der drittletzten Spalte von der vorletzten Spalte
- (iii) ...

(iv) der ersten Spalte von der zweiten Spalte ab, das ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & \dots & \dots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} - x_1 & \dots & \dots & \dots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix},$$

aus deren Zeilen wir jeweils die für den Induktionsschritt nötigen Vorfaktoren rausziehen können, wenn wir nach der ersten Zeile entwickeln. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & \dots & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \dots & \dots & \dots & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} & \dots & \dots & \dots & x_{n+2}^{n+1} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & \dots & \dots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} - x_1 & \dots & \dots & \dots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{n+2} - x_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1) \dots (x_{n+2} - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_2^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{n+2}^n \end{pmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+2} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(d) Da A ganzzahlig ist, ist auch $\det(A)$ ganzzahlig. Auf Grund von Lemma 27.15 wissen wir, dass die Einträge der Inversen gerade dem Produkt aus der Determinanten und den Kofaktoren bestehen, also

$$\det(A)A_{i,j}^{-1} = \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} [A]_{ij}.$$

Hier sieht man direkt, dass $\det(A) \in \{-1, 1\}$ die Ganzzahligkeit der Inversen impliziert. (1 Punkt)

Nun sei A^{-1} ganzzahlig. Dann ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ganzzahlig, und damit $\det(A)$ ganzzahlig mit ganzzahligem Inversen, also $\det(A) \in \{-1, 1\}$. (1 Punkt)

Hausaufgabe II-5.3 (Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen) 3 Punkte

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \text{Endo}(V)$. Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen aus [Lemma 27.22](#), also der folgenden Eigenschaften der Determinante von Endomorphismen:

- (a) $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
- (b) $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von f ist invertierbar.
- (c) $\det(\text{id}_V) = 1$.
- (d) $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- (e) $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
- (f) $\det(f^*) = \det(f)$.

Lösung.

Je ein Punkt pro Aussage, also

(3 Punkte).

- (a) Die Skalierung des Endomorphismus f zu αf skaliert jedes Bild mit α , die Spalten jeder Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$ für eine beliebige Basis B_V von V sind also mit α skaliert. Die n -Linearität der Determinante liefert das Ergebnis.
- (b) Es ist genau dann $\det(f) \neq 0$ wenn jede Darstellungsmatrix von f invertierbar ist, weil die Determinante des Endomorphismus genau über die Determinante der Darstellungsmatrizen definiert ist (was nur geht, weil diese ähnlich sind).

Das ist wiederum äquivalent zu $\text{Rang}(f) = n$, da $\text{Rang}(f)$ mit dem Rang jeder Darstellungsmatrix übereinstimmt.

Das ist wiederum auf Grund des Dimensionssatzes äquivalent dazu, dass f invertierbar ist.

- (c) Es ist $\det(\text{id}_V) = 1$, weil die Darstellungsmatrizen bezüglich gleicher Basen im Urbild- und Bildraum immer die Einheitsmatrix sind.
- (d) Nach [Satz 19.9](#) gilt für jede beliebige Basis B_V von V

$$\det(f \circ g) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f \circ g)) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)) \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(g)) = \det(f) \det(g).$$

- (e) Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$\det(f^{-1}) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f^{-1})) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)^{-1}) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f))^{-1}$$

für jede beliebige Basis B_V von V unter Verwendung von [Satz 19.13](#).

(f) Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$\det(f^*) = \det(\mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_V^*}(f^*)) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)^\top) = \det(\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)) = \det(f)$$

für jede beliebige Basis B_V von V und der dazugehörigen dualen Basis B_V^* von V^* unter Verwendung von Satz 21.8.

Hausaufgabe II-5.4 (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums) 1.5 + 1 = 2.5 Punkte

- (a) Es sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ über dem geordneten Körper K . Zeigen Sie, dass es genau zwei Äquivalenzklassen von gleichorientierten Basen gibt.
- (b) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien B_V und \widehat{B}_V Basen von V mit dazugehörigen dualen Basen B_V^*, \widehat{B}_V^* von V^* . Zeigen Sie, dass B_V und \widehat{B}_V genau dann gleichorientiert sind, wenn es B_V^* und \widehat{B}_V^* sind.

Lösung.

- (a) Da der Körper geordnet ist, ist er unendlich. Da die Raumdimension nach Voraussetzung mindestens 1 ist, gibt es unendlich viele Basen, man kann nämlich in einer beliebigen Basis einen beliebigen Vektor mit allen Körperelementen ungleich Null skalieren.

Da $\text{char}(K) \neq 2$, ist $-1 \neq 1$, entsprechend kann man für eine beliebige Basis B einen der Basisvektoren mit -1 skalieren um eine weitere Basis \widehat{B} zu erhalten. Auf Grund der Multilinearität der Determinante ist dann B umgekehrt orientiert zu \widehat{B} , es gibt also mindestens zwei Äquivalenzklassen. **Beachte:** Man sieht hier übrigens auch direkt ein, dass bei Äquivalenzklassen gleichmächtig sind.

Ist nun \widetilde{B} eine beliebige Basis, dann ist \widetilde{B} entweder zu B gleichorientiert und damit in deren Äquivalenzklasse, oder nicht, in diesem Fall ist \widetilde{B} zu \widehat{B} gleichorientiert, denn es ist

$$\det(\mathcal{T}_{\widetilde{B}_V \leftarrow \widehat{B}_V}) = \det(\mathcal{T}_{\widetilde{B}_V \leftarrow B_V} \mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}) = \det(\mathcal{T}_{\widetilde{B}_V \leftarrow B_V})(\mathcal{T}_{B_V \leftarrow \widehat{B}_V}) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

(1.5 Punkte)

- (b) Es ist

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{T}_{\widetilde{B}_V \leftarrow B_V}) &= \det(\mathcal{M}_{\widetilde{B}_V \leftarrow B_V}(\text{id}_V)) = \det(\mathcal{M}_{\widetilde{B}_V \leftarrow B_V}(\text{id}_V)^\top) = \det(\mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow \widetilde{B}_V^*}(\text{id}_V^*)) \\ &= \det(\mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow \widehat{B}_V^*}(\text{id}_V^*)) = \det(\mathcal{T}_{B_V^* \leftarrow \widehat{B}_V^*}). \end{aligned}$$

(1 Punkt)