R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg



# Hausaufgabe II - 4

Ausgabedatum: 4. Mai 2026
Abgabedatum: 11. Mai 2026

**Hausaufgabe II-4.1** (Ranginvarianz unter Tensorisomorphismen) 3 Punkte

Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$ und $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$ zwei Tensorprodukte der $K$-Vektorräume $V_1, \dots, V_N$. Weiterhin sei $I \in \operatorname{Homo}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\otimes} = I \circ \otimes$, siehe Satz 24.8.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}(t) = \operatorname{Rang}(I(t))$ für alle $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$.

**Hausaufgabe II-4.2** (Parallele vs. sequentielle Tensorierung) 2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte

Es seien $U, V, W$ $K$-Vektorräume. Weiterhin sei die Vorschrift

$$I \colon U \otimes V \otimes W \ni u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W \tag{$*$}$$

gegeben.

(a) Erklären Sie alle Bedeutungen, die das Symbol $\otimes$ in der Vorschrift ($*$) hat.

(b) Zeigen Sie, dass $f \coloneqq (U \times V \times W) \ni (u, v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$ trilinear ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Vorschrift ($*$) einen Isomorphismus von Vektorräumen definiert.

(d) Zeigen Sie, dass $I$ i. A. kein Isomorphismus von Tensorprodukträumen ist, indem Sie zeigen, dass es Tensoren gibt, die in $(U \otimes V) \otimes W$ mit dem dazugehörigen bilinearen $\otimes$ Rang 1 haben, aber deren Urbild unter $I$ in $U \otimes V \otimes W$ mit dem trilineraren $\otimes$ Rang 2 haben.

**Hausaufgabe II-4.3** (Symmetrisierung und Schiefsymmetrisierung von Tensoren) 3 + 2 = 5 Punkte

Es sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ mit $\operatorname{char}(K) = 0$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Satz 26.10, also die folgenden Aussagen:

(a) Der Endomorphismus

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Sym}(t) \coloneqq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{sym}} \subseteq V^{\otimes r} \tag{26.12}$$

bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf symmetrische Tensoren in $V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ ab. Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Sym}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{sym}}$ ist.

(b) Der Endomorphismus

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \operatorname{Skew}(t) \coloneqq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, P_\sigma(t) \in V^{\otimes r}_{\text{skew}} \subseteq V^{\otimes r} \tag{26.13}$$

bildet beliebige Tensoren in $V^{\otimes r}$ auf schiefsymmetrische Tensoren in $V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ab. Für $t \in V^{\otimes r}$ gilt $\operatorname{Skew}(t) = t$ genau dann, wenn $t \in V^{\otimes r}_{\text{skew}}$ ist.