

## HAUSAUFGABE II - 4 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 4. Mai 2026

Abgabedatum: 11. Mai 2026

### Hausaufgabe II-4.1 (Ranginvarianz unter Tensorisomorphismen)

3 Punkte

Es seien  $N \in \mathbb{N}_0$  und  $(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \otimes)$  und  $(\widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k, \widetilde{\otimes})$  zwei Tensorprodukte der  $K$ -Vektorräume  $V_1, \dots, V_N$ . Weiterhin sei  $I \in \text{Homo}(\bigotimes_{k=1}^N V_k, \widetilde{\bigotimes}_{k=1}^N V_k)$  mit der Eigenschaft  $\widetilde{\otimes} = I \circ \otimes$ , siehe Satz 24.8.

Zeigen Sie, dass  $\text{Rang}(t) = \text{Rang}(I(t))$  für alle  $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$ .

#### Lösung.

Es sei  $t \in \bigotimes_{k=1}^N V_k$  beliebig mit  $\text{Rang } n \in \mathbb{N}$  und einer Darstellung

$$t = \sum_{i=1}^n v_1^i \otimes \dots \otimes v_n^i.$$

Dann gilt auf Grund der Linearität von  $I$  und dem Zusammenhang der Abbildungen  $\otimes$  und  $\widetilde{\otimes}$

$$I(t) = I\left(\sum_{i=1}^n v_1^i \otimes \dots \otimes v_n^i\right) = \sum_{i=1}^n I(v_1^i \otimes \dots \otimes v_n^i) = \sum_{i=1}^n v_1^i \widetilde{\otimes} \dots \widetilde{\otimes} v_n^i$$

und somit  $\text{Rang}(I(t)) \leq n$ , also dass der Isomorphismus  $I$  den Rang lediglich verkleinern kann.

Mit  $I^{-1} \circ \widetilde{\otimes} = \otimes$  und getauschten Rollen erhalten wir analog ebenfalls, dass  $I^{-1}$  den Rang lediglich verkleinern kann, und damit muss

$$\text{Rang}(t) = \text{Rang}(I^{-1}(I(t))) \leq \text{Rang}(I(t)) \leq \text{Rang}(t)$$

womit alle Terme übereinstimmen müssen.

(3 Punkte)

**Hausaufgabe II-4.2** (Parallele vs. sequentielle Tensorierung)  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$  Punkte

Es seien  $U, V, W$   $K$ -Vektorräume. Weiterhin sei die Vorschrift

$$I: U \otimes V \otimes W \ni u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W \quad (*)$$

gegeben.

- Erklären Sie alle Bedeutungen, die das Symbol  $\otimes$  in der Vorschrift  $(*)$  hat.
- Zeigen Sie, dass  $f := (U \times V \times W) \ni (u, v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$  trilinear ist.
- Zeigen Sie, dass die Vorschrift  $(*)$  einen Isomorphismus von Vektorräumen definiert.
- Zeigen Sie, dass  $I$  i. A. kein Isomorphismus von Tensorprodukträumen ist, indem Sie zeigen, dass es Tensoren gibt, die in  $(U \otimes V) \otimes W$  mit dem dazugehörigen bilinearen  $\otimes$  Rang 1 haben, aber deren Urbild unter  $I$  in  $U \otimes V \otimes W$  mit dem trilinearen  $\otimes$  Rang 2 haben.

**Lösung.**

- Das Symbol  $\otimes$  tritt in 6 Bedeutungen auf. Von links nach rechts:
  - Rein symbolisch in der Bezeichnung des Tensorproduktraums  $U \otimes V \otimes W$  zu den Räumen  $U, V$  und  $W$ .
  - Als Auswertung der trilinearen Abbildung  $\otimes$  aus dem Tensorprodukt  $(U \otimes V \otimes W, \otimes)$  an der Stelle  $(u, v, w) \in U \times V \times W$ .
  - Als Auswertung der bilinearen Abbildung  $\otimes$  aus dem Tensorprodukt  $(U \otimes V, \otimes)$  an der Stelle  $(u, v) \in U \times V$ .
  - Als Auswertung der bilinearen Abbildung  $\otimes$  aus dem Tensorprodukt  $((U \otimes V) \otimes W, \otimes)$  an der Stelle  $(u \otimes v, w) \in (U \otimes V) \times W$ .
  - Rein symbolisch in der Bezeichnung des Tensorproduktraums  $U \otimes V$  zu den Räumen  $U$  und  $V$ .
  - Rein symbolisch in der Bezeichnung des Tensorproduktraums  $(U \otimes V) \otimes W$  zu den Räumen  $U \otimes V$  und  $W$ .

(2 Punkte)

- (b) Für jede feste  $u, v \in U, V$  ist  $u \otimes v$  eindeutig belegt und damit der erste Eingang des äußeren bilinearen Tensorprodukts in der Definition. Der verbleibende Eingang zu  $W$  ist linear als rechter Eingang des gleichen äußeren bilinearen Tensorprodukts.

Die Eingänge zu  $U$  und  $V$  verhalten sich analog, wir zeigen also nur die Linearität des Eingangs zu  $U$ . Dafür seien  $v$  und  $w$  aus  $V, W$  beliebig aber fest gewählt und wir untersuchen  $u \mapsto (u \otimes v) \otimes w$ . Für  $\alpha \in K$  und  $u, \bar{u} \in U$  ist auf Grund der Bilinearität beider auftretenden Tensorprodukte

$$((u + \alpha \bar{u}) \otimes v) \otimes w = (u \otimes v + \alpha(\bar{u} \otimes v)) \otimes w = (u \otimes v) \otimes w + \alpha(\bar{u} \otimes v) \otimes w.$$

(2 Punkte)

- (c) Die Wohldefiniertheit der Abbildung über die einfachen Tensoren folgt wie immer mit dem Argument, dass wir zwar auf einer größeren Menge als auf einer Basis die Werte vorschreiben, aber da diese, wie eben gezeigt, trilinear vorgegeben werden, erhalten wir keinen Konflikt in den vorgegebenen Werten, die universelle Eigenschaft des Tensorproduktraums sichert die Existenz einer eindeutigen linearen Abbildung  $I$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Die Bijektivität der Abbildung erhalten wir durch eine explizite Konstruktion der Umkehrabbildung. Auf den einfachen Tensoren aus  $(U \otimes V) \otimes W$ , also Tensoren der Form  $t \otimes w = (\sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i) \otimes w$  definieren wir  $F: (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes V \otimes W$  durch die Vorschrift

$$F(t \otimes w) = F\left(\left(\sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i\right) \otimes w\right) = \sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i \otimes w,$$

welche wieder bilinear in den Eingängen zu  $U \otimes V$  und  $W$  ist, und wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts auf  $((U \otimes V) \otimes W, \otimes)$  eine eindeutige lineare Abbildung von  $(U \otimes V) \otimes W$  nach  $U \otimes V \otimes W$  definiert.

Die Abbildung  $F$  ist die Inverse zu  $I$ , denn  $F \circ I$  ergibt auf dem Erzeugendensystem der einfachen Tensoren die Identität. (2 Punkte)

- (d) Wir haben in [Hausaufgabe II-4.1](#) gesehen, dass Tensorraumisomorphismen den Rang eines Tensors erhalten.

Für linear unabhängige Vektorfamilien  $(u_1, u_2)$  aus  $U$  und  $(v_1, v_2)$  aus  $V$  und  $w \in W \setminus \{0\}$  ist aber

$$\text{Rang}((u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2) \otimes w) = 1 \quad \text{aber} \quad \text{Rang}(u_1 \otimes v_1 \otimes w + u_2 \otimes v_2 \otimes w) = 2.$$

Den ersten Rang kann man direkt anhand der Darstellung ablesen, denn weder  $w$  noch  $(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2)$  sind der Nullvektor. Für  $w$  folgt das nach Voraussetzung, für  $(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2)$  weil wir die Familien  $(u_1, u_2)$  aus  $U$  und  $(v_1, v_2)$  aus  $V$  zu Basen ergänzen

können und dann die eindeutige Darstellung von  $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2$  für den Tensor aus der Tensorbasis erhalten.

Den zweiten Rang sieht man ebenfalls ein, indem man die linear unabhängigen Familien  $(u_1, u_2)$  aus  $U$  und  $(v_1, v_2)$  aus  $V$  und  $w \in W \setminus \{0\}$  zu Basen ergänzt. Nimmt man nun an, dass der Rang nicht 2 sondern 1 ist, also dass der Tensor  $u_1 \otimes v_1 \otimes w + u_2 \otimes v_2 \otimes w$  auch die Darstellung  $u \otimes v \otimes w$  für  $u \in U, v \in V$  und  $\bar{w} \in W$  hat, dann haben  $u, v$  eindeutige Darstellungen  $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \bar{u}, v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \bar{v}$  mit  $\bar{u}$  aus dem zur Basisergänzung gehörigen komplementären Unterraum zu  $\langle u_1, u_2 \rangle$  und analog in  $V$ . Entsprechend wäre

$$\begin{aligned} u \otimes v \otimes \bar{w} &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \bar{u}) \otimes (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \bar{v}) \otimes \bar{w} \\ &= \alpha_1 \beta_1 u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{w} + \alpha_1 \beta_2 u_1 \otimes v_2 \otimes \bar{w} + \alpha_2 \beta_1 u_2 \otimes v_1 \otimes \bar{w} + \alpha_2 \beta_2 u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{w} + \dots \end{aligned}$$

und wir erhalten den Widerspruch, dass  $\beta_2 = 0$  und  $\beta_2 \neq 0$  sein müssten. Das gleiche Argument haben wir in der Lösung von [Hausaufgabe II-3.1](#) schon einmal gesehen. (2 Punkte)

**Hausaufgabe II-4.3** (Symmetrisierung und Schiefsymmetrisierung von Tensoren) 3 + 2 = 5 Punkte

Es sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  mit  $\text{char}(K) = 0$ . Weiter sei  $r \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie [Satz 26.10](#), also die folgenden Aussagen:

(a) Der Endomorphismus

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \text{Sym}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t) \in V_{\text{sym}}^{\otimes r} \subseteq V^{\otimes r} \tag{26.12}$$

bildet beliebige Tensoren in  $V^{\otimes r}$  auf symmetrische Tensoren in  $V_{\text{sym}}^{\otimes r}$  ab. Für  $t \in V^{\otimes r}$  gilt  $\text{Sym}(t) = t$  genau dann, wenn  $t \in V_{\text{sym}}^{\otimes r}$  ist.

(b) Der Endomorphismus

$$V^{\otimes r} \ni t \mapsto \text{Skew}(t) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) P_\sigma(t) \in V_{\text{skew}}^{\otimes r} \subseteq V^{\otimes r} \tag{26.13}$$

bildet beliebige Tensoren in  $V^{\otimes r}$  auf schiefsymmetrische Tensoren in  $V_{\text{skew}}^{\otimes r}$  ab. Für  $t \in V^{\otimes r}$  gilt  $\text{Skew}(t) = t$  genau dann, wenn  $t \in V_{\text{skew}}^{\otimes r}$  ist.

**Lösung.**

- (a) Zur Wohldefiniertheit der Abbildung: Erst einmal ist der Term auf der rechten Seite tatsächlich wohldefiniert, denn es gibt nur eine endliche Anzahl von Permutationen in  $S_r$ . (0.5 Punkte)

Eine wichtige Beobachtung für den Beweis ist nun, dass die Summe über die alle Permutationen dafür sorgt, dass ein beliebiges  $\hat{\sigma} \in S_r$ , das die Argumente permutiert, in der Summe verschwindet, denn  $S_r \circ \hat{\sigma} = S_r$ . Für alle  $1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n$  ist daher wieder mit der Koordinatenermittlereigenschaft:

$$\begin{aligned} \text{Sym}(t)^{i_{\hat{\sigma}(1)}, \dots, j_{\hat{\sigma}(r)}} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_{\sigma}(t)(v^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, \dots, v^{j_{\hat{\sigma}(r)}}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} t(v^{j_{\sigma(\hat{\sigma}(1))}}, \dots, v^{j_{\sigma(\hat{\sigma}(r))}}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_{\sigma \circ \hat{\sigma}}(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r \circ \hat{\sigma}} P_{\sigma}(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_{\sigma}(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \text{Sym}(t)^{i_1, \dots, j_r}, \end{aligned}$$

und damit ist das Bild tatsächlich symmetrisch. (2 Punkte)

Die Strukturhaltung des Endomorphismus ist offensichtlich, da die Abbildung über die skalierte Summe von Endomorphismen dargestellt wurde. (0.5 Punkte)

- (b) Der Beweis für die Schiefsymmetrisierung verläuft vollständig analog, es muss nur zusätzlich die Verträglichkeit des Signums mit der Verkettung und Invertierung beachtet werden, dann erhält man sofort, dass

$$\begin{aligned} \text{Skew}(t)^{i_{\hat{\sigma}(1)}, \dots, j_{\hat{\sigma}(r)}} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) P_{\sigma}(t)(v^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, \dots, v^{j_{\hat{\sigma}(r)}}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) t(v^{j_{\sigma(\hat{\sigma}(1))}}, \dots, v^{j_{\sigma(\hat{\sigma}(r))}}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) P_{\sigma \circ \hat{\sigma}}(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn}(\sigma \circ \hat{\sigma})) \text{sgn}(\hat{\sigma}) P_{\sigma \circ \hat{\sigma}}(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r \circ \hat{\sigma}} \operatorname{sgn}(\sigma) P_\sigma(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma(t)(v^{j_1}, \dots, v^{j_r}) \\ &= \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}) \operatorname{Skew}(t)^{i_1, \dots, j_r}, \end{aligned}$$

(2 Punkte)