# Hausaufgabe II - 3

Ausgabedatum: 27. April 2026
Abgabedatum: 4. Mai 2026

**Hausaufgabe II-3.1** (Rang-1 Tensoren bilden i. A. keien Unterraum) 3 Punkte

Es seien $U$ und $V$ zweidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen $(u_1, u_2)$ und $(v_1, v_2)$. Zeigen Sie, dass die Tensoren vom Rang kleiner oder gleich 1 keinen Unterraum von $U \otimes V$ bilden.

**Hausaufgabe II-3.2** (Basics zum Tensorprodukt linearer Abbildungen) 3 Punkte

Zeigen Sie die Behauptungen aus Beispiel 23.31, also die folgenden Aussagen:

(a) Sind $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper, dann gilt $\mathrm{id}_U \boxtimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{U \otimes V}$.

(b) Es seien $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2$ Vektorräume über demselben Körper. Weiter seien $f_1 \in \mathrm{Homo}(V_1, W_1)$, $f_2 \in \mathrm{Homo}(U_1, V_1)$, $g_1 \in \mathrm{Homo}(V_2, W_2)$ und $g_2 \in \mathrm{Homo}(U_2, V_2)$. Dann gilt

$$(f_1 \circ f_2) \boxtimes (g_1 \circ g_2) = (f_1 \boxtimes g_1) \circ (f_2 \boxtimes g_2).$$

**Hausaufgabe II-3.3** (Lineare Unabhängigkeit in Elementartensordarstellungen) 7 Punkte

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $U$ und $V$ zwei $K$-Vektorräume sowie $t = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ für Familien $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ aus $U$ bzw. $V$.

Zeigen Sie: Der Rang von $t$ ist genau dann $n$, wenn $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ linear unabhängige Familien von Vektoren in $U$ bzw. $V$ sind.

**Hinweis:** Für die Rückrichtung sollten Sie $\mathrm{id}_U \boxtimes v_i^*$ nutzen, um einen Widerspruch zu erzeugen.

**Hausaufgabe II-3.4** (Maximaler Rang eines Tensors) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Es seien $U$ und $V$ Vektorräume über demselben Körper $K$ und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $U$ und $V$. Zeigen Sie Folgerung 23.39, also die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $t \in U \otimes V$ gilt $\operatorname{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$.

(b) Hat mindestens einer der Räume $U$ und $V$ endliche Dimension, so gilt für alle $t \in U \otimes V$

$$\operatorname{Rang}(t) \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}. \tag{23.21}$$

Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}$ existiert ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\operatorname{Rang}(t) = r$.

(c) Haben $U$ und $V$ beide unendliche Dimension, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\operatorname{Rang}(t) = r$.

**Hausaufgabe II-3.5** (Tensoren als lineare Abbildungen) 4 Punkte

Gegeben seien die $\mathbb{Q}$-Vektorräume $U \coloneqq \mathbb{Q}^3$ und $V \coloneqq \mathbb{Q}^{\{1,2\}}$, $\alpha \coloneqq 4 \in \mathbb{Q}$ sowie die Vektoren

$$u \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in U, \quad v \coloneqq (x \mapsto x + 2) \in V, \quad u^* \coloneqq \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z \right) \in U^*, \quad v^* \coloneqq (f \mapsto f(1)).$$

Bestimmen Sie alle möglichen Auswertungen von den bezüglich des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
& \begin{array}{c} U \otimes V \cong \\ \mathrm{Homo}(K, U \otimes V) \end{array} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Homo}(U^*, V) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Homo}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
& \mathrm{Homo}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}$$

(vom Ende von § 23) zu $u \otimes v$ gehörigen Größen an den Stellen $\alpha, u^*, v^*$ und $u^* \otimes v^*$.