

HAUSAUFGABE II - 3

Ausgabedatum: 27. April 2026

Abgabedatum: 4. Mai 2026

Hausaufgabe II-3.1 (Rang-1 Tensoren bilden i. A. keinen Unterraum) 3 Punkte

Es seien U und V zweidimensionale \mathbb{R} -Vektorräume mit Basen (u_1, u_2) und (v_1, v_2) . Zeigen Sie, dass die Tensoren vom Rang kleiner oder gleich 1 keinen Unterraum von $U \otimes V$ bilden.

Hausaufgabe II-3.2 (Basics zum Tensorprodukt linearer Abbildungen) 3 Punkte

Zeigen Sie die Behauptungen aus [Beispiel 23.31](#), also die folgenden Aussagen:

- (a) Sind U und V Vektorräume über demselben Körper, dann gilt $\text{id}_U \boxtimes \text{id}_V = \text{id}_{U \otimes V}$.
- (b) Es seien $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2$ Vektorräume über demselben Körper. Weiter seien $f_1 \in \text{Homo}(V_1, W_1)$, $f_2 \in \text{Homo}(U_1, V_1)$, $g_1 \in \text{Homo}(V_2, W_2)$ und $g_2 \in \text{Homo}(U_2, V_2)$. Dann gilt

$$(f_1 \circ f_2) \boxtimes (g_1 \circ g_2) = (f_1 \boxtimes g_1) \circ (f_2 \boxtimes g_2).$$

Hausaufgabe II-3.3 (Lineare Unabhängigkeit in Elementartensordarstellungen) 7 Punkte

Es seien $n \in \mathbb{N}$, U und V zwei K -Vektorräume sowie $t = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ für Familien $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ aus U bzw. V .

Zeigen Sie: Der Rang von t ist genau dann n , wenn $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ linear unabhängige Familien von Vektoren in U bzw. V sind.

Hinweis: Für die Rückrichtung sollten Sie $\text{id}_U \boxtimes v_i^*$ nutzen, um einen Widerspruch zu erzeugen.

Hausaufgabe II-3.4 (Maximaler Rang eines Tensors) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Zeigen Sie [Folgerung 23.39](#), also die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $t \in U \otimes V$ gilt $\text{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$.
 (b) Hat mindestens einer der Räume U und V endliche Dimension, so gilt für alle $t \in U \otimes V$

$$\text{Rang}(t) \leq \min\{\dim(U), \dim(V)\}. \quad (23.21)$$

Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leq \min\{\dim(U), \dim(V)\}$ existiert ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\text{Rang}(t) = r$.

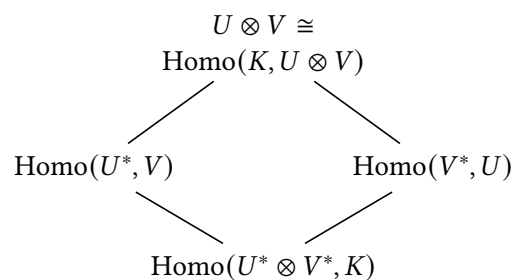
- (c) Haben U und V beide unendliche Dimension, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\text{Rang}(t) = r$.

Hausaufgabe II-3.5 (Tensoren als lineare Abbildungen) 4 Punkte

Gegeben seien die \mathbb{Q} -Vektorräume $U := \mathbb{Q}^3$ und $V := \mathbb{Q}^{\{1,2\}}$, $\alpha := 4 \in \mathbb{Q}$ sowie die Vektoren

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in U, \quad v := (x \mapsto x + 2) \in V, \quad u^* := \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z \right) \in U^*, \quad v^* := (f \mapsto f(1)).$$

Bestimmen Sie alle möglichen Auswertungen von den bezüglich des Diagramms



(vom Ende von § 23) zu $u \otimes v$ gehörigen Größen an den Stellen α, u^*, v^* und $u^* \otimes v^*$.