R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Hausaufgabe II - 3 (Lösung)

Ausgabedatum: 27. April 2026
Abgabedatum: 4. Mai 2026

Hausaufgabe II-3.1 (Rang-1 Tensoren bilden i. A. keien Unterraum) 3 Punkte

Es seien U und V zweidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen (u_1, u_2) und (v_1, v_2). Zeigen Sie, dass die Tensoren vom Rang kleiner oder gleich 1 keinen Unterraum von $U \otimes V$ bilden.

Lösung.

Jeder Tensor $t \in U \otimes V$ vom Rang kleiner oder gleich 1 besitzt $u \in U$ und $v \in V$ mit den eindeutigen Darstellungen $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ und $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, so dass (wegen der Bilinearität von $\otimes$ gilt:

$$u \otimes v = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \otimes (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \alpha_1\beta_1\, u_1 \otimes v_1 + \alpha_1\beta_2\, u_1 \otimes v_2 + \alpha_2\beta_1\, u_2 \otimes v_1 + \alpha_2\beta_2\, u_2 \otimes v_2.$$

Das schränkt die Wahl der möglichen Koeffizienten, mit denen die (Rang-1-)Tensoren $u_i \otimes v_j$, $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$ zu Rang-1-Tensoren linearkombiniert werden können erheblich ein. Die Linearkombination

$$u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2$$

aus Rang-1-Tensoren kann damit nicht mehr Rang 1 haben, denn für die Koeffizienten in den Basisdarstellungen dazugehöriger u und v würde sich der Widerspruch ergeben, dass keiner der Koeffizienten den Wert 0 hat, aber dass mindestens zwei den Wert Null haben müssen. (3 Punkte)

Hausaufgabe II-3.2 (Basics zum Tensorprodukt linearer Abbildungen) 3 Punkte

Zeigen Sie die Behauptungen aus Beispiel 23.31, also die folgenden Aussagen:

(a) Sind U und V Vektorräume über demselben Körper, dann gilt $\mathrm{id}_U \boxtimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{U \otimes V}$.

(b) Es seien $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2$ Vektorräume über demselben Körper. Weiter seien $f_1 \in \operatorname{Homo}(V_1, W_1)$, $f_2 \in \operatorname{Homo}(U_1, V_1)$, $g_1 \in \operatorname{Homo}(V_2, W_2)$ und $g_2 \in \operatorname{Homo}(U_2, V_2)$. Dann gilt

$$(f_1 \circ f_2) \boxtimes (g_1 \circ g_2) = (f_1 \boxtimes g_1) \circ (f_2 \boxtimes g_2).$$

Lösung.

(a) Es ist per Definition

$$\mathrm{id}_U \boxtimes \mathrm{id}_V(u \otimes v) = \mathrm{id}_U(u) \otimes \mathrm{id}_V(v) = u \otimes v = \mathrm{id}_{U \otimes V}(u \otimes v)$$

auf den Elementartensoren und damit per Definition von $\mathrm{id}_U \boxtimes \mathrm{id}_V$ auch auf allen anderen Tensoren. (1 Punkt)

(b) Wieder gilt auf den Elementartensoren und damit auf dem ganzen Raum

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2) \boxtimes (g_1 \circ g_2)(u \otimes v) &= (f_1 \circ f_2)(u) \otimes (g_1 \circ g_2)(v) \\ &= f_1(f_2(u)) \otimes g_1(g_2(v)) \\ &= f_1 \boxtimes g_1(f_2(u) \otimes g_2(v)) \\ &= (f_1 \boxtimes g_1) \circ (f_2 \boxtimes g_2)(u \otimes v).\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe II-3.3 (Lineare Unabhängigkeit in Elementartensordarstellungen) 7 Punkte

Es seien $n \in \mathbb{N}$, U und V zwei K-Vektorräume sowie $t = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ für Familien $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ aus U bzw. V.

Zeigen Sie: Der Rang von t ist genau dann n, wenn $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ und $(v_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ linear unabhängige Familien von Vektoren in U bzw. V sind.

Hinweis: Für die Rückrichtung sollten Sie $\mathrm{id}_U \boxtimes v_i^*$ nutzen, um einen Widerspruch zu erzeugen.

Lösung.

„$\Rightarrow$“:
Wir zeigen die Kontraposition der Aussage, wir gehen also davon aus, dass $(u_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ linear abhängig ist, also dass Koeffizienten $(\alpha_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ existieren, so dass

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null ist. O. B. d. A. ist $\alpha_1 \neq 0$, und damit

$$u_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i$$

und damit

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \\
&= u_1 \otimes v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i \\
&= -\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i\right) \otimes v_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} (u_i \otimes v_1) + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} \left(u_i \otimes -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} v_1\right) + \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes v_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} u_i \otimes \left(v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} v_1\right)
\end{aligned}$$

was eine Darstellung mit weniger als n Summanden ist, im Widerspruch zur Minimalität von n auf Grund der Rangvoraussetzung. (3 Punkte)

„$\Leftarrow$":
Angenommen der Rang von t wäre nicht n sondern $r < n$. Dann existiert also eine Darstellung

$$t = \sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i \otimes \tilde{v}_i.$$

Ergänzen wir die $(\tilde{u}_i)_{i \in 1,\ldots,r}$ zu einer Basis B_U von U und analog $(\tilde{v}_i)_{i \in 1,\ldots,r}$ zu einer Basis B_V von V und definieren wir für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ das Dualraumelement $v_j^* \in V^*$ auf B_V so dass es auf v_j den Wert 1 und auf allen verbleibenden Basiselementen den Wert 0 zurückgibt, dann ergibt sich für $\mathrm{id}_U \boxtimes v_j^* \in \mathrm{Homo}(U \otimes V; U \otimes K)$, dass

$$\mathrm{id}_U \boxtimes v_j^*(t) = \mathrm{id}_U \boxtimes v_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{id}_U \boxtimes v_j^*(u_i \otimes v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_j^*(v_i) \\
&= u_j \otimes 1
\end{aligned}
$$

aber wegen der zweiten, kürzeren Darstellung von t auch, dass

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_U \boxtimes v_j^*(t) &= \mathrm{id}_U \boxtimes v_j^* \left(\sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i \otimes \tilde{v}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathrm{id}_U \boxtimes v_j^*(\tilde{u}_i \otimes \tilde{v}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i \otimes \underbrace{v_j^*(\tilde{v}_i)}_{\in K} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} v_j^*(\tilde{v}_i)\tilde{u}_i \right) \otimes 1.
\end{aligned}
$$

Somit ist $u_j \in \langle (\tilde{u}_i)_{i \in \{1,\ldots,r\}} \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und damit auch $\langle (u_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}} \rangle \in \langle (\tilde{u}_i)_{i \in \{1,\ldots,r\}} \rangle$, womit auf Grund des Satzes von Steinitz die Familie $(u_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ mit ihren $n > r$ Mitgliedern nicht linear unabhängig sein kann, was einen Widerspruch liefert. (4 Punkte)

Hausaufgabe II-3.4 (Maximaler Rang eines Tensors) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Zeigen Sie Folgerung 23.39, also die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $t \in U \otimes V$ gilt $\mathrm{Rang}(t) \in \mathbb{N}_0$.

(b) Hat mindestens einer der Räume U und V endliche Dimension, so gilt für alle $t \in U \otimes V$

$$
\mathrm{Rang}(t) \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}. \tag{23.21}
$$

Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\}$ existiert ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\mathrm{Rang}(t) = r$.

(c) Haben U und V beide unendliche Dimension, dann existiert für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ ein Tensor $t \in U \otimes V$ mit $\mathrm{Rang}(t) = r$.

Lösung.

(a) Die Endlichkeit des Tensorrangs folgt direkt aus der Erzeugendeneigenschaft der Elementartensoren, siehe Lemma 23.12. (1 Punkt)

(b) In Hausaufgabe II-3.3 haben wir gezeigt, dass Minimaldarstellungen von Tensoren immer durch linear unabhängige Familien von Links- und Rechtstensorfaktorfamilien realisiert werden und die Raumdimension ist nach dem Satz von Steinitz nach oben beschränkend für die Anzahl der Mitglieder, die eine linear unabhängige Familie von Vektoren haben kann. (2 Punkte)

(c) In Hausaufgabe II-3.3 haben wir ebenfalls gezeigt, dass linear unabhängige Familien von Links- und Rechtstensorfaktorfamilien für Tensoren zu genau zwei Vektorräumen auch immer Minimaldarstellungen realisieren. Wir können also auf Grund der Dimension der Vektorräume linear unabhängige Familien $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ finden, mit denen wir für jeden Rang $r \in \mathbb{N}$ mittels

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$$

immer einen Tensor von Rang r konstruieren können. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-3.5 (Tensoren als lineare Abbildungen) 4 Punkte

Gegeben seien die $\mathbb{Q}$-Vektorräume $U \coloneqq \mathbb{Q}^3$ und $V \coloneqq \mathbb{Q}^{\{1,2\}}$, $\alpha \coloneqq 4 \in \mathbb{Q}$ sowie die Vektoren

$$u \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in U, \quad v \coloneqq (x \mapsto x + 2) \in V, \quad u^* \coloneqq \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z \right) \in U^*, \quad v^* \coloneqq (f \mapsto f(1)).$$

Bestimmen Sie alle möglichen Auswertungen von den bezüglich des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{matrix} U \otimes V \cong \\ \mathrm{Homo}(K, U \otimes V) \end{matrix} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{Homo}(U^*, V) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{Homo}(V^*, U) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{Homo}(U^* \otimes V^*, K) &
\end{tikzcd}$$

(vom Ende von § 23) zu $u \otimes v$ gehörigen Größen an den Stellen α, u^*, v^* und $u^* \otimes v^*$.

Lösung.

Der Tensor $u \otimes v$ kann, wie das Diagramm zeigt, als lineare Abbildung in $\text{Homo}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^{\{0,1\}})$, $\text{Homo}((\mathbb{Q}^3)^*, \otimes \mathbb{Q}^{\{0,1\}})$, $\text{Homo}((\mathbb{Q}^{\{0,1\}})^* \otimes \mathbb{Q}^3)$ sowie $\text{Homo}((\mathbb{Q}^3)^* \otimes (\mathbb{Q}^{\{0,1\}})^*, \mathbb{Q})$ interpretiert werden.

Die passenden Auswertungen an α, u^*, v^* und $u^* \otimes v^*$ liefern

$$u \otimes v(4) = 4u \otimes v = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \otimes (x \mapsto x + 2)$$

$$u \otimes v\,(u^*) = u^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x \mapsto x + 2) = (x \mapsto 6x + 12)$$

$$u \otimes v\,(v^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} v^*(x \mapsto x + 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$u \otimes v\,(u^* \otimes v^*) = u^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot v^*(x \mapsto x + 2) = 6 \cdot 3 = 18$$

(4 Punkte)