

HAUSAUFGABE II - 2

Ausgabedatum: 20. April 2026

Abgabedatum: 27. April 2026

Hausaufgabe II-2.1 (Fundamentale Unterräume) 4 Punkte

Bestimmen Sie über \mathbb{Z}_3 die vier fundamentalen Unterräume zu $f: \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_2} \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g(0) + g(1) \\ g(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

Hausaufgabe II-2.2 (Existenz einer primalen Basis) 4 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^* . Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Hausaufgabe II-2.3 (Tensorprodukte) 3 Punkte

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K . Zeigen Sie [Satz 23.11 \(ii\)](#), also dass wenn $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V und $I \in \text{Homo}(U \otimes V, U \tilde{\otimes} V)$ ein Isomorphismus mit einem weiteren K -Vektorraum $U \tilde{\otimes} V$ ist, dann ist auch $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ mit $\tilde{\otimes} := I \circ \otimes: U \times V \rightarrow U \tilde{\otimes} V$ ein Tensorprodukt von U und V .

Hausaufgabe II-2.4 (Komponentenweise lineare Abhängigkeit bei Tensoren) $6 + 1 = 7$ Punkte

(a) Es seien U und V zwei K -Vektorräume und $U \otimes V$ mit \otimes ein Tensorprodukt. Weiter seien $u, \bar{u} \in U \setminus \{0\}$ und $v, \bar{v} \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es ist $u \otimes v = \bar{u} \otimes \bar{v}$ in $U \otimes V$.

(ii) Es existieren $\lambda_U, \lambda_V \in K$, so dass

$$u = \lambda_U \bar{u}, \quad v = \lambda_V \bar{v} \quad \text{und} \quad \lambda_U \lambda_V = 1.$$

- (b) Es sei V ein K -Vektorraum und $v, \bar{v} \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit \otimes ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass genau dann $v \otimes \bar{v} = \bar{v} \otimes v$ ist, wenn $\{v, \bar{v}\}$ linear abhängig ist.