Hausaufgabe II - 2 (Lösung)

Ausgabedatum: 20. April 2026
Abgabedatum: 27. April 2026

Hausaufgabe II-2.1 (Fundamentale Unterräume) 4 Punkte

Bestimmen Sie über $\mathbb{Z}_3$ die vier fundamentalen Unterräume zu $f\colon \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_2} \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g(0)+g(1) \\ g(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

Lösung.

Hier gibt es für jeden der vier Räume zwei Möglichkeiten, ihn zu bestimmen, siehe Satz 21.11.

Es ergeben sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} g(0)+g(1) \\ g(1) \end{pmatrix} \,\middle|\, g \in {\mathbb{Z}_3}^{\mathbb{Z}_2} \right\} = \mathbb{Z}_3^2 \\ \operatorname{Kern}(f) &= \left\{ g \in {\mathbb{Z}_3}^{\mathbb{Z}_2} \,\middle|\, g(1) = 0 \wedge g(0)+g(1) = 0 \right\} = \{0\} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f^*) &= \operatorname{Kern}(f)^0 = \left({\mathbb{Z}_3}^{\mathbb{Z}_2}\right)^* \\ \operatorname{Kern}(f^*) &= {}^0\operatorname{Bild}(f) = \{0\}. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Hausaufgabe II-2.2 (Existenz einer primalen Basis) 4 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Lösung.

Wir bezeichnen die zu $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ duale Basis vom Bidualraum V^{**} mit $B^{**} = \{v_1^{**}, \dots, v_n^{**}\}$. Da die kanonische Injektion i_V im endlichdimensionalen Fall eine kanonische Bijektion ist, gilt das Gleiche für $i_V^{-1}\colon V^{**} \to V$. (1 Punkt)

Entsprechend ist $B \coloneqq i_V^{-1}(B^{**}) = \{i_V^{-1}(v_1^{**}), \dots, i_V^{-1}(v_n^{**})\} \subseteq V$ eine Basis von V, siehe Lemma 17.6. (1 Punkt)

Auf Grund der Eigenschaft, dass B^{**} dual zu B^* ist, und der Definition der kanonischen Bijektion, ist

$$v_i^*(i_V^{-1}(v_j^{**})) = v_j^{**}(v_i^*) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

damit ist B^* dual zu B. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-2.3 (Tensorprodukte) 3 Punkte

Es seien U und V Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie Satz 23.11 (ii), also dass wenn $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V und $I \in \operatorname{Homo}(U \otimes V, U \widetilde{\otimes} V)$ ein Isomorphismus mit einem weiteren K-Vektorraum $U \widetilde{\otimes} V$ ist, dann ist auch $(U \widetilde{\otimes} V, \widetilde{\otimes})$ mit $\widetilde{\otimes} \coloneqq I \circ \otimes\colon U \times V \to U \widetilde{\otimes} V$ ein Tensorprodukt von U und V.

Lösung.

Wir überprüfen die Definition Definition 23.6 eines Tensorprodukts. Es sei dafür eine beliebige bilineare Abbildung $b\colon U \times V \to W$ in irgendeinen K-Vektorraum W gegeben. Auf Grund der Tensorprodukteigenschaft für $(U \otimes V, \otimes)$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f\colon U \otimes V \to W$ mit $b = f \circ \otimes$.

Die Abbildung $\tilde{f} \coloneqq f \circ I^{-1}\colon U \widetilde{\otimes} V \to W$ ist dann linear als Konkatenation linearer Abbildungen und es gilt

$$\tilde{f} \circ \widetilde{\otimes} = f \circ I^{-1} \circ I \circ \otimes = f \circ \otimes = b$$

und die Eindeutigkeit der Abbildung $\tilde{f}$ folgt direkt aus der Bijektivität von I, denn für $\hat{f}$ mit der Eigenschaft $b = \hat{f} \circ \widetilde{\otimes}$ ist

$$b = \hat{f} \circ \widetilde{\otimes} = \hat{f} \circ I \circ \otimes$$

und wegen der Eindeutigkeit von f damit auch $\hat{f} \circ I = f$ und damit $\hat{f} = f \circ I^{-1} = \tilde{f}$. (3 Punkte)

Hausaufgabe II-2.4 (Komponentenweise lineare Abhängigkeit bei Tensoren) 6 + 1 = 7 Punkte

(a) Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $U \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Weiter seien $u, \bar{u} \in U \setminus \{0\}$ und $v, \bar{v} \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (i) Es ist $u \otimes v = \bar{u} \otimes \bar{v}$ in $U \otimes V$.

(ii) Es existieren $\lambda_U, \lambda_V \in K$, so dass

$$u = \lambda_U \, \bar{u}, \quad v = \lambda_V \, \bar{v} \quad \text{und} \quad \lambda_U \, \lambda_V = 1.$$

(b) Es sei V ein K-Vektorraum und $v, \bar{v} \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass genau dann $v \otimes \bar{v} = \bar{v} \otimes v$ ist, wenn $\{v, \bar{v}\}$ linear abhängig ist.

Lösung.

(a) Wir starten mit der einfacheren Richtung, nämlich der Implikation $(ii)\Rightarrow(i)$: Hier ist auf Grund der Multilinearität des Tensorprodukts

$$u \otimes v = \lambda_U \bar{u} \otimes \lambda_V \bar{v} = \underbrace{(\lambda_U \, \lambda_V)}_{=1} \, (\bar{u} \otimes \bar{v}) = \bar{u} \otimes \bar{v}.$$

(1 Punkt)

Verbleibt also die Implikation $(i)\Rightarrow(ii)$:

Dafür seien Basen $B_U = (u_i)_{i \in I}$ von U und $B_V = (v_j)_{j \in J}$ von U respektive V gegeben und mit ihnen die dazugehörigen (endlichen) Linearkombinationsdarstellungen

$$u = \sum_{i \in I_0} \alpha_i u_i \qquad \bar{u} = \sum_{i \in I_0} \bar{\alpha}_i u_i$$
$$v = \sum_{j \in J_0} \beta_j v_j \qquad \bar{v} = \sum_{j \in J_0} \bar{\beta}_j v_j$$

Hier haben wir o. B. d. A. angenommen, dass in den Darstellungen die Indexmengen I_0 und J_0, gleich sind, ansonsten vereinigen wir die Mengen der beteiligten Indizes und füllen mit Nullkoeffizienten die Darstellungen auf.

Auf Grund von Übungsaufgabe II-1.1 wissen wir, dass $u \otimes v = \bar{u} \otimes \bar{v}$ genau dann gilt, wenn

$$f(u \otimes v) = f(\bar{u} \otimes \bar{v}) \quad \text{für alle} \quad f \in \operatorname{Homo}(U \otimes V; K) = (U \otimes V)^* .$$

was wegen der universellen Eigenschaft der Tensorproduktabbildung $\otimes$ äquivalent zu

$$b(u, v) = b(\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{für alle} \quad b \in \operatorname{Bil}(U, V; K)$$

ist.

Multilineare Abbildungen sind auf dem Produkt von Basen eindeutig definiert (Satz 23.4), wir können also diejenigen bilinearen Abbildungen $b_{i,j}$ mit $(i, j) \in I_0 \times J_0$ untersuchen, welche für genau ein Tupel $(u_i, v_j) \in B_U \times B_V$ den Wert 1 ausgeben und für alle weiteren Elemente des Basisprodukt den Wert Null. Deren Werte auf $U \times V$ entsprechen gerade dem Produkt der Koeffizienten zu den b_i in deren Beteiligung an der Darstellung des Arguments.

Entsprechend ist für jedes $(i, j) \in I_0 \times J_0$ gerade

$$\alpha_i \beta_j = \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_j.$$

(2 Punkte)

Hieraus können wir direkt ablesen, dass immer entweder beide Produkte oder keines von beiden 0 ist. Da wir $i \in I_0$ und $j \in J_0$ frei wählen dürfen und sowohl Koeffizienten von u und von v existieren, die nicht null sind, können wir im Fall von Produkten, die Null sind, folgern, dass immer α_i und $\bar{\alpha}_i$ beziehungsweise β_j und $\bar{\beta}_j$ gleichzeitig null sind. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass in den Darstellungen von u und v keine Nullkoeffizienten aufgetreten sind, anderenfalls könnten wir $I_0 \times J_0$ einfach geeignet einschränken. (1 Punkt)

Entsprechend dürfen wir für beliebige $(i, j) \in I_0 \times J_0$ schreiben, dass

$$\frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}_i} = \frac{\bar{\beta}_j}{\beta_j}.$$

Hält man nun ein j fest und lässt alle $i \in I_0$ durchlaufen, dann erkennt man, dass die Quotienten $\frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}_i}$ alle konstant sind und analog auch die Quotienten $\frac{\beta_j}{\bar{\beta}_j}$. (1 Punkt)

Wir setzen also

$$\lambda_U \coloneqq \frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}_i} \quad \text{und} \quad \lambda_V \coloneqq \frac{\beta_j}{\bar{\beta}_j} = \frac{\bar{\alpha}_i}{\alpha_i} = \frac{1}{\lambda_U}$$

und sind fertig. (1 Punkt)

(b) Sind v oder $\bar{v}$ der Nullvektor ist die Aussage trivial, denn dann sind beide Tensoren Null und die Menge offensichtlich linear abhängig.

Vorausgesetzt $\{v, \bar{v}\}$ ist linear abhängig aber beide Vektoren sind ungleich Null, dann gibt es ein Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda \bar{v}$ und damit

$$v \otimes \bar{v} = (\lambda \bar{v}) \otimes \bar{v} = \lambda(\bar{v} \otimes \bar{v}) = \bar{v} \otimes (\lambda \bar{v}) = \bar{v} \otimes v.$$

(0.5 Punkte)

Vorausgesetzt die Tensoren sind gleich und ungleich Null, dann gibt es nach dem ersten Aufgabenteil λ_1, λ_2 mit

$$v = \lambda_1 \bar{v} \text{ und } \bar{v} = \lambda_2 \bar{v},$$

womit die Menge linear abhängig ist. (0.5 Punkte)