Hausaufgabe II - 1

Ausgabedatum: 13. April 2026
Abgabedatum: 20. April 2026

Hausaufgabe II-1.1 (Basics zu Linearformen und Dualräumen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.

   (i) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

   (ii) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(b) Es sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass genau dann $v_1 = v_2$ gilt, wenn $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$.

Hausaufgabe II-1.2 (Duale Basen) 2 Punkte

Bestimmen Sie die Koeffizienten von $v^* \colon \mathbb{Z}_3^3 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a +_3 b +_3 c \in Z_3$ in $(\mathbb{Z}_3^3)^*$ bezüglich der dualen Basis B^* zu $B \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und nutzen Sie die Koeffizienten um $v^* \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

Hausaufgabe II-1.3 (Darstellung von Linearformen) 3 Punkte

Gegeben seien die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ als $B \coloneqq \{e_1, e_2, e_3\}$ sowie die weitere Basis $\hat{B} \coloneqq \{2e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3\}$. Bestimmen Sie $B \cap \hat{B}$ und $B^* \cap \hat{B}^*$. Was können Sie beobachten?

Hausaufgabe II-1.4 ((Prä-)-Annihilatoren) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{f \mapsto f(1)\}$ in $\mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(b) Es seien V ein K-Vektorraum und W_1, W_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ (ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Hausaufgabe II-1.5 (Basics zur dualen Abbildung) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

(a) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(b) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K