R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg



# Hausaufgabe II - 1 (Lösung)

Ausgabedatum: 13. April 2026
Abgabedatum: 20. April 2026

**Hausaufgabe II-1.1** (Basics zu Linearformen und Dualräumen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.

($i$) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

($ii$) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(b) Es sei $V$ ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass genau dann $v_1 = v_2$ gilt, wenn $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$.

**Lösung.**

(a) ($i$) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $\mathbb{R}$ ist keine Linearform, denn der Zielraum ist kein Körper über sich selbst. (1 Punkt)

($ii$) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist eine Linearform, denn der Zielraum ist der zugrunde liegende Körper über sich selbst und die Abbildung ist linear, denn für $A, B \subseteq \mathbb{Z}_2$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ und die Abbildung als $f$ bezeichnet ist

$$\begin{aligned} f(\alpha B) &= \#(\alpha B) \mod 2 = (\#B \mod 2) = f(B) = \alpha f(B) \quad \text{für } \alpha = 1 \\ f(\alpha B) &= \#(\emptyset) \mod 2 = 0 = \alpha f(B) \quad \text{für } \alpha = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(A \triangle B) &= \#(A \triangle B) \mod 2 = (\#A + \#B - 2\#(A \cap B)) \mod 2 \\ &= \#A \mod 2 + \#B \mod 2 = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Wir setzen $v \coloneqq v_1 - v_2$.

Ist $v = 0$, dann wissen wir aus den grundlegenden Eigenschaften der linearen Abbildungen, dass $v^*(v) = 0$ für alle $v^* \in V^*$ und damit $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$. (1 Punkt)

Ist $v \neq 0$, dann ist $\{v\}$ linear unabhängig und es existiert eine lineare Abbildung mit $v^*(v) = v^*(v_1) - v^*(v_2) = 1 \neq 0$, siehe Satz 17.10 und damit $v^*(v_1) \neq v^*(v_2)$. (1 Punkt)

**Hausaufgabe II-1.2** (Duale Basen) 2 Punkte

Bestimmen Sie die Koeffizienten von $v^* \colon \mathbb{Z}_3^3 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a +_3 b +_3 c \in Z_3$ in $(\mathbb{Z}_3^3)^*$ bezüglich der dualen Basis $B^*$ zu $B \coloneqq \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und nutzen Sie die Koeffizienten um $v^* \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

**Lösung.**

Die Koeffizienten erhalten wir direkt aus der Koordinatenermittlereigenschaft der primalen Basis für die Darstellungen von Linearformen bezüglich der dualen Basis, also aus Gleichung (20.7b) in Satz 20.10, also die Koeffizienten

$$\xi_1 = v^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 +_3 1 +_3 1 = 0, \quad \xi_2 = v^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 +_3 2 +_3 1 = 1, \quad \xi_3 = v^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 +_3 1 +_3 3 = 2.$$

(1 Punkt)

Wegen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $v^* \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$ (1 Punkt)

**Hausaufgabe II-1.3** (Darstellung von Linearformen) 3 Punkte

Gegeben seien die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ als $B \coloneqq \{e_1, e_2, e_3\}$ sowie die weitere Basis $\hat{B} \coloneqq \{2e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3\}$. Bestimmen Sie $B \cap \hat{B}$ und $B^* \cap \hat{B}^*$. Was können Sie beobachten?

**Lösung.**

Um die dualen Basen zu bestimmen und zu vergleichen um ihren Schnitt zu bestimmen benötigen wir eine Darstellung der dualen Basiselemente bezüglich einer gemeinsamen Basis. Am einfachsten ist es hier, die Dualbasiselemente bezüglich einer der Dualbasen darzustellen, wir wählen hier $B^*$. Dann ist sofort klar, dass

$$\Phi_{B^*}^{-1}(B^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^*}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^*}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B^*} \right\}$$

(1 Punkt)

Die Darstellung der Elemente von $\hat{B}^*$ bezüglich $B^*$ erhalten wir gemäß Gleichung (20.7b) durch Auswerten der Elemente von $\hat{B}^*$ an den Elementen von $B$. Das sind aber auch genau die Einträge der Basiswechselmatrix $\mathcal{M}_{B^* \leftarrow \hat{B}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = \mathcal{M}_{B \leftarrow \hat{B}}(\mathrm{id}_V)^{-T}$. (Den Wechsel von Basismengen in Basisfamilien der hier notwendig ist führen wir nicht explizit durch.)

Da es sich bei $E$ um die kanonische Basis handelt ist $\mathcal{M}_{E \leftarrow B}(\mathrm{id}_V)$ gerade die Matrix, in der spaltenweise die Elemente von $B$ bezüglich $E$ dargestellt stehen, also die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deren Inverstransponierte ist

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

also ist

$$\Phi_{B^*}^{-1}(\hat{B}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^*}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^*}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B^*} \right\}.$$

Die duale Basis ändert sich also vollständig und der Schnitt der dualen Basen ist entsprechend leer, obwohl in der primalen Basis nur ein Vektor ausgetauscht wurde. Dabei hat das Skalieren von $e_1$ das Element $e_1^*$ verändert und die Summenbildung die Elemente $e_2^*, e_3^*$. (2 Punkte)

**Hausaufgabe II-1.4** ((Prä-)-Annihilatoren) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{f \mapsto f(1)\}$ in $\mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(b) Es seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $W_1, W_2$ Unterräume von $V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$  (ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

**Lösung.**

(a) Es ist

$$^0\{f \mapsto f(1)\} = \{f\colon \{0,1,2\} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\} = \langle e_0, e_2 \rangle,$$

wobei $(e_0, e_2)$ bereits eine Basisfamilie ist. (1 Punkt)

(b) $(i)$ Ist $f \in (W_1 + W_2)^0$, dann ist $f(w_1) = f(w_1 + 0) = 0$ für alle $w_1 \in W_1$ und das analoge Argument für $W_2$ liefert $(W_1 + W_2)^0 \subseteq W_1^0 \cap W_2^0$. (0.5 Punkte)

Ist $f \in W_1^0 \cap W_2^0$, dann ist für jedes $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ auch $f(w) = f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = 0 + 0$ und damit $(W_1 + W_2)^0 \supseteq W_1^0 \cap W_2^0$. (0.5 Punkte)

$(ii)$ Ist $f \in W_1^0 + W_2^0$, dann ist $f(w) = f_1(w) + f_2(w) = 0 + 0 = 0$ für alle $w \in (W_1 \cap W_2)$ und damit $(W_1 \cap W_2)^0 \supset W_1^0 + W_2^0$. (0.5 Punkte)

Ist $f \in (W_1 \cap W_2)^0$, dann ergänzen wir eine Basis $B_\cap$ von $(W_1 \cap W_2)$ zu einer Basis $B_1$ von $W_1$ und zu einer Basis $B_2$ von $W_2$. Dann ist $B_\cup \coloneqq B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$. Wir definieren $f_1$ auf $B_\cup$ durch $f$ auf $B_\cup \setminus B_1$ und $0$ auf $B_1$, also $f \in W_1^0$. Wir definieren $f_2$ auf $B_\cup$ durch $f$ auf $B_\cup \setminus B_2$ und $0$ auf $B_2$, also $f \in W_2^0$. Dann ist $f = f_1 + f_2$. (1.5 Punkte)

**Hausaufgabe II-1.5** (Basics zur dualen Abbildung) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

(a) $\mathbb{R}^\mathbb{N} \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(b) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum $U$ von $V$, jeweils über dem gleichen Körper $K$

**Lösung.**

(a) Für alle $v^* \in (\mathbb{R}^\mathbb{N})^*$ und $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist

$$f^*(v^*)(x) = v^*(f(x)) = v^*(x_2, x_3, \dots)$$

die Funktion $f^*(v^*)$ arbeitet also wie $v^*$ nur auf dem Rest der Folge ab dem zweiten Element. Eine zusätzliche Veranschaulichung findet man, wenn man die linear unabhängigen Folgen $(e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots))$ nimmt. Diese bilden eine Basis der endlich getragenen Folgen. Für jedes Element der linear unabhängigen Menge der dualen Elemente $\langle \{e_i^* \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$ sieht man dann, dass

$$f^*(e_i^*)(e_j) = e_i^*(f(e_j)) = e_i^*(e_{j-1}) = \delta_{i,(j-1)}$$

also dass $f^*(e_i^*) = e_{i+1}^*$. Das zeigt gerade, dass (zumindest auf den endlich getragenen Folgen) $f^*$ als Rechtsshift arbeitet. (1.5 Punkte)

(b) Für jedes $v^* \in V^*$ und $u \in U$ ist

$$f^*(v^*)(u) = v^*(f(u)) = \underbrace{v^*}_{\in V^*}(\underbrace{u}_{\in V}) = \underbrace{v^*|_U}_{\in U^*}(\underbrace{u}_{\in U}),$$

die zur Einbettung duale Abbildung ist also die Restriktion. (1.5 Punkte)