

ÜBUNG II - 13

Ausgabedatum: 6. Juli 2026

Übungsaufgabe II-13.1. (Normierte Räume)

Es sei $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Standardvektorraum über den reellen Zahlen. Entscheiden Sie, für welche Dimensionen n und $p \in [1, \infty)$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

von Innenprodukten induziert sind, und skizzieren Sie die deren **Einheitssphären**

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$$

für $p = \{1, 2, \infty\}$ und $n = 2$.

Übungsaufgabe II-13.2. (Orthogonale Projektion und Abstandsminimierung)

Sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum mit endlichdimensionalem Unterraum $U \subseteq V$.

Zeigen Sie, dass

$$\gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) \leq \gamma(v - u, v - u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Was bedeutet das im Sinne der induzierten Norm?

Übungsaufgabe II-13.3. (Orthogonalität)

- (a) Es sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie [Satz 41.37](#), also dass [Algorithmen 41.33](#) und [41.35](#) aus einer linear unabhängigen Familie $(u_1, \dots, u_k)$ von V eine orthogonale Familie $(v_1, \dots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \dots, k$ generieren.

- (b) Es sei $M := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens in $(\mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto x^T M y)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Übungsaufgabe II-13.4. (Orthogonale Gruppe)

Es sei (V, γ) ein **endlichdimensionaler** reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie [Lemma 41.48](#) zur orthogonalen und speziellen orthogonalen Gruppe, also die folgenden Aussagen:

- (i) Die Menge

$$O(V, \gamma) := \{f \in \text{Endo}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-isometrisch}\} \quad (41.31)$$

bildet mit der Komposition eine Gruppe.

- (ii) Ist V endlich-dimensional, dann ist die Menge

$$SO(V, \gamma) := \{f \in O(V, \gamma) \mid \det(f) = 1\} \quad (41.32)$$

ein Normalteiler in $O(V, \gamma)$.

Übungsaufgabe II-13.5. (Isometrie)

- (a) Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ungleich dem Nullraum und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha: V \ni v \mapsto \alpha v \in V$. Zeigen Sie:

- (i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ auf V ist f_α ein γ -isometrischer Endomorphismus auf (V, γ) .
 - (ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ gibt es kein Innenprodukt γ auf V , so dass f_α ein γ -isometrischer Endomorphismus auf (V, γ) ist.
 - (iii) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ_1 auf V existiert ein Innenprodukt γ_2 , so dass f_α (γ_1, γ_2) -isometrisch als Homomorphismus von (V, γ_1) nach (V, γ_2) ist.
- (b) Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei reelle Innenprodukträume und $f \in \text{Homo}(V, W)$ ein isometrischer Homomorphismus. Zeigen Sie [Lemma 41.42](#), also die folgenden Aussagen:
- (i) f ist injektiv.
 - (ii) Gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv, also ein isometrischer Isomorphismus.
- (c) Es sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$S_U: V \rightarrow V, \quad S_U(v) := v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v)$$

heißt die **Spiegelung an $U^\perp$** .

- (i) Zeigen Sie, dass S_U ein γ -isometrischer, selbstinverser Endomorphismus ist.
- (ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S_U .
- (iii) Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ und $v \neq w$ genau einen eindimensionalen Unterraum U gibt, so dass $S_U(v) = w$ ist.