

ÜBUNG II - 13 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 6. Juli 2026

Übungsaufgabe II-13.1. (Normierte Räume)

Es sei $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Standardvektorraum über den reellen Zahlen. Entscheiden Sie, für welche Dimensionen n und $p \in [1, \infty)$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

von Innenprodukten induziert sind, und skizzieren Sie die deren **Einheitssphären**

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$$

für $p = \{1, 2, \infty\}$ und $n = 2$.

Lösung.

Für $n = 1$ stimmen alle angegebenen Normen mit dem Absolutbetrag überein, der von dem Innenprodukt $(u, v) \mapsto u \cdot v$ induziert wird.

Für $n > 1$ hingegen ist das im Allgemeinen nicht der Fall, hier überprüft man die Parallelogrammgleichung und erhält im Fall der Maximumsnorm beispielsweise

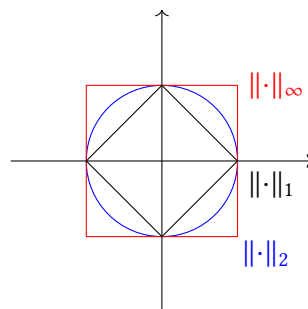
$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 4 = 2 \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 \right).$$

Mit den beiden gleichen Vektoren erhält man für $p \in [1, \infty)$, dass

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_p^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2 \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_p^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_p^2 \right)$$

genau dann gilt, wenn $p = 2$ ist. In diesem Fall erkennt man leicht, dass hier wieder das zugrunde liegende Innenprodukt durch $(x, y) \mapsto x^T y$ gegeben ist.

Die Skizze der Einheitssphären ist



Übungsaufgabe II-13.2. (Orthogonale Projektion und Abstandsminimierung)

Sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum mit endlichdimensionalem Unterraum $U \subseteq V$.

Zeigen Sie, dass

$$\gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) \leq \gamma(v - u, v - u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Was bedeutet das im Sinne der induzierten Norm?

Lösung.

Da $\text{proj}_U^\gamma(v) - u \in U$ und $v - \text{proj}_U^\gamma(v) \in U^\perp$ gilt (Satz 41.29), liefert der Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \gamma(v - u, v - u) &= \underbrace{\gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v) + \text{proj}_U^\gamma(v) - u, v - \text{proj}_U^\gamma(v) + \text{proj}_U^\gamma(v) - u)}_{=0} \\ &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) + \underbrace{\gamma(\text{proj}_U^\gamma(v) - u, \text{proj}_U^\gamma(v) - u)}_{\geq 0} \\ &\geq \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)). \end{aligned}$$

Im Sinne der γ -induzierten Norm heißt das, dass die Projektion innerhalb von U den Abstand zu v minimiert, was genau die Aussage von Bemerkung 41.31 ist.

Übungsaufgabe II-13.3. (Orthogonalität)

- (a) Es sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie [Satz 41.37](#), also dass [Algorithmen 41.33](#) und [41.35](#) aus einer linear unabhängigen Familie $(u_1, \dots, u_k)$ von V eine orthogonale Familie $(v_1, \dots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \dots, k$ generieren.
- (b) Es sei $M := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens in $(\mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto x^T M y)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung.

- (a) Wir zeigen die Aussage per Induktion über die Anzahl der Elemente in der Familie. Den Fall der Orthonormalisierung müssen wir nicht separat untersuchen, denn hier werden die Vektoren nur mit Skalaren aus $K \setminus \{0\}$ skaliert.

Für $k = 1$ ist die Aussage klar, da die Summe hier zu 0 zusammenfällt und damit $u_1 = v_1$ gesetzt wird. Diese Familie ist trivialerweise orthogonal.

Sei nun eine linear unabhängige Familie $(v_1, \dots, v_{k+1})$ gegeben. Auf Grund der sequentiellen Gestalt der Gram-Schmidt Orthogonalisierung entsprechen die ersten k -Schritte der Gram-Schmidt Orthogonalisierung für die Teilfamilie $(v_1, \dots, v_k)$. Die Familie $(u_1, \dots, u_k)$ ist also orthogonal und $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ für alle $j = 1 \dots k$. Im nächsten Schritt der Gram-Schmidt Orthogonalisierung wird diese Familie nun erweitert um

$$u_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} u_i.$$

Dabei gilt dann für $j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \gamma(u_{k+1}, u_j) &= \gamma\left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} u_i, u_j\right) \\ &= \gamma(v_{k+1}, u_j) - \sum_{i=1}^k \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} \gamma(u_i, u_j) \\ &= \gamma(v_{k+1}, u_j) - \frac{\gamma(v_{k+1}, u_j)}{\gamma(u_j, u_j)} \gamma(u_j, u_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $(u_1, \dots, u_k)$ orthogonal ist, nach Induktionsvoraussetzung.

Es verbleibt Erzeugendeneigenschaft zu zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ für alle $j = 1 \dots k$. Es verbleibt diese Aussage für $j = k+1$ zu zeigen. Es genügt dafür zu zeigen, dass $v_{k+1} \in \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle$, das ist auf Grund der Definition aber klar, denn genau so ist das Objekt ja konstruiert.

Beachte: Hier sieht man dass der Orthogonalisierungsprozess im wesentlichen unabhängig von der Innenprodukteigenschaft von γ und von dem zugrunde liegenden Körper ist. Um Gram-Schmidt Orthogonalisierung durchführen zu können ist $\gamma(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ hinreichend, denn dann können wir den Nenner bilden.

- (b) Wir starten mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) und orthonormalisieren diese Basis nach dem Gram-Schmidt Verfahren.

Entsprechend ist

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|_M} = \frac{e_1}{\sqrt{e_1^T M e_1}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T.$$

Im nächsten Schritt folgt ohne Normierung zuerst

$$u_2 = e_2 - \underbrace{e_2^T M u_1}_{0} u_1 = e_2$$

und damit nach Normierung

$$u_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|_M} = \frac{e_2}{\sqrt{e_2^T M e_2}} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)^T.$$

Hier sieht man, dass e_1 und e_2 schon „zufällig“ orthogonal im M -Innenprodukt waren, aber noch nicht normiert.

Im letzten Schritt bestimmen wir vorerst ohne Normierung

$$u_3 = e_3 - e_3^T M u_1 u_1 - e_3^T M u_2 u_2 = e_3 - \frac{1}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 = e_3 - u_1 - u_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$

und stellen fest, dass diese Vektor zum Glück schon normiert ist. Die sich aus dem Verfahren ergebende Orthonormalbasis ist also

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe II-13.4. (Orthogonale Gruppe)

Es sei (V, γ) ein **endlichdimensionaler** reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie [Lemma 41.48](#) zur orthogonalen und speziellen orthogonalen Gruppe, also die folgenden Aussagen:

- (i) Die Menge

$$O(V, \gamma) := \{f \in \text{Endo}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-isometrisch}\} \quad (41.31)$$

bildet mit der Komposition eine Gruppe.

- (ii) Ist V endlich-dimensional, dann ist die Menge

$$SO(V, \gamma) := \{f \in O(V, \gamma) \mid \det(f) = 1\} \quad (41.32)$$

ein Normalteiler in $O(V, \gamma)$.

Lösung.

- (i) Endomorphismen sind offensichtlich stabil unter Verknüpfung, die Verkettung ist also auf $\text{Endo}(V)$ eine abgeschlossene Verknüpfung. [Satz 41.40](#) zeigt, dass auch die γ -Isometrie unter Verknüpfung erhalten bleibt. Assoziativität der Verkettung kennen wir bereits aus der Linearen Algebra I, damit liegt eine Halbgruppe vor. Das neutrale Element ist die Identität. Die Existenz der Inversen in $O(V, \gamma)$ haben wir in [Hausaufgabe II-12.2](#) gezeigt, wobei die Bijektivität ein Folgerung aus [Lemma 41.42](#) aufgrund der Endlichdimensionalität ist.
- (ii) Die Untergruppeneigenschaft der speziellen orthogonalen Gruppe folgt mit dem Untergruppenkriterium wieder mit [Satz 41.40](#) (Isometrie ist stabil unter Verkettung) und der Eigenschaft $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Dass es sich hier auch um einen Normalteiler handelt, also dass für alle $f \in O(V, \gamma)$ gilt, dass

$$f \circ SO(V, \gamma) = SO(V, \gamma) \circ f$$

für alle $f \in O(V, \gamma)$ sieht man aufgrund deren Invertierbarkeit anhand von

$$f \circ g = f \circ g \circ f^{-1} \circ f$$

für beliebige $g \in SO(V, \gamma)$, da $\det(f \circ g \circ f^{-1}) = \det(f) \det(g) \det(f^{-1}) = \det(g) = 1$.

Alternativ könnte man argumentieren, dass $\det$ ein Gruppenhomomorphismus von $O(V, \gamma)$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$ als Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist und die $SO(V, \gamma)$ gerade deren Kern, also ein Normalteiler ist.

Übungsaufgabe II-13.5. (Isometrie)

- (a) Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ungleich dem Nullraum und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha: V \ni v \mapsto \alpha v \in V$. Zeigen Sie:
- (i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ auf V ist f_α ein γ -isometrischer Endomorphismus auf (V, γ) .
 - (ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ gibt es kein Innenprodukt γ auf V , so dass f_α ein γ -isometrischer Endomorphismus auf (V, γ) ist.
 - (iii) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ_1 auf V existiert ein Innenprodukt γ_2 , so dass f_α (γ_1, γ_2) -isometrisch als Homomorphismus von (V, γ_1) nach (V, γ_2) ist.
- (b) Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei reelle Innenprodukträume und $f \in \text{Homo}(V, W)$ ein isometrischer Homomorphismus. Zeigen Sie [Lemma 41.42](#), also die folgenden Aussagen:
- (i) f ist injektiv.
 - (ii) Gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv, also ein isometrischer Isomorphismus.
- (c) Es sei (V, γ) ein reeller Innenproduktraum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$S_U: V \rightarrow V, \quad S_U(v) := v - 2 \operatorname{proj}_U^\gamma(v)$$

heißt die **Spiegelung an $U^\perp$** .

- (i) Zeigen Sie, dass S_U ein γ -isometrischer, selbstinverser Endomorphismus ist.
- (ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S_U .
- (iii) Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ und $v \neq w$ genau einen eindimensionalen Unterraum U gibt, so dass $S_U(v) = w$ ist.

Lösung.

- (a) (i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ ist $\alpha^2 = 1$ und damit für beliebige Innenprodukte γ und Vektoren $u, v \in V$ entsprechend

$$\gamma(f_\alpha(u), f_\alpha(v)) = \gamma(\alpha u, \alpha v) = \alpha^2 \gamma(u, v) = \gamma(u, v),$$

was die Isometrie zeigt.

- (ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ ist jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, was einen Widerspruch zu [Lemma 41.47](#) liefert.
- (iii) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und γ_1 ein Innenprodukt auf V . Wir definieren $\gamma_2 := \frac{1}{\alpha^2} \gamma_1$. Dann ist

$$\gamma_2(f_\alpha(v), f_\alpha(v)) = \frac{1}{\alpha^2} \gamma_1(\alpha v, \alpha v) = \gamma_1(v, v).$$

- (b) (i) Es sei $v \in \text{Kern}(f)$, also $f(v) = 0$. Das heißt $\|f(v)\|_{Y_2} = 0$, und wegen Aussage (ii) in Satz 41.39 ist auch $\|v\|_{Y_1} = 0$, also $v = 0$. Nach Lemma 17.8 ist f also injektiv.
- (ii) Die Aussage folgt aufgrund der Endlichdimensionalität sofort aus Folgerung 18.9.
- (c) (i) Die Linearität folgt direkt aus der Definition und der Linearität des orthogonalen Projektors (Satz 41.29). Zudem ist

$$\begin{aligned} \gamma(S_U(v), S_U(v)) &= \gamma(v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v), v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v)) \\ &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) + \gamma(-\text{proj}_U^\gamma(v), -\text{proj}_U^\gamma(v)) \\ &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) + \gamma(-\text{proj}_U^\gamma(v), -\text{proj}_U^\gamma(v)) \\ &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) + (-1)^2 \gamma(\text{proj}_U^\gamma(v), \text{proj}_U^\gamma(v)) \\ &= \gamma(v, v), \end{aligned}$$

und S_U damit γ -isometrisch.

Dass S_U selbstinvers ist, sieht man anhand von

$$\begin{aligned} S_U(S_U(v)) &= S_U(v) - 2 \text{proj}_U^\gamma(S_U(v)) \\ &= v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v) - 2 \text{proj}_U^\gamma(v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v)) \\ &= v - 2 \text{proj}_U^\gamma(v) - 2 \text{proj}_U^\gamma(v) + 4 \underbrace{\text{proj}_U^\gamma(\text{proj}_U^\gamma(v))}_{\text{proj}_U^\gamma(v)} \\ &= v. \end{aligned}$$

- (ii) Aufgrund von Lemma 41.47 wissen wir bereits, dass S_U nur Eigenwerte 1 und -1 besitzen kann. Wir erhalten mithilfe von Satz 41.29:

$$\text{Eig}(S_U, 1) = \text{Kern}(\text{id} - S_U) = \text{Kern}(\text{proj}_U^\gamma) = U^\perp.$$

Weiterhin ist mithilfe von Bemerkung 41.30:

$$\text{Eig}(S_U, -1) = \text{Kern}(-\text{id} - S_U) = \text{Kern}(\text{id} - \text{proj}_U^\gamma) = U.$$

- (iii) Da S_U selbst invers ist folgt aus

$$S_U(v) = w \quad \text{auch} \quad S_U(w) = v.$$

Für beliebiges U mit $S_U(v) = w$ ist daher

$$S_U(v - w) = S_U(v) - S_U(w) = w - v,$$

also $v - w \in \text{Eig}(S_U, -1) = U$, die einzige Möglichkeit ist daher $U = \langle v - w \rangle$ zu setzen. Dieser Raum hat tatsächlich die geforderte Eigenschaft, denn er ist eindimensional und

$$\begin{aligned} S_U(v) &= v - 2 \frac{\gamma(v, v - w)}{\gamma(v - w, v - w)} (v - w) \\ &= v - 2 \frac{\gamma(v, v) - \gamma(v, w)}{\gamma(v, v) - 2\gamma(v, w) + \underbrace{\gamma(w, w)}_{=\gamma(v, v)}} (v - w) \\ &= v - (v - w) = w. \end{aligned}$$