

ÜBUNG II - 12

Ausgabedatum: 29. Juni 2026

Übungsaufgabe II-12.1. (Orthogonalität)

Es seien V ein Vektorraum und $\gamma \in \text{Bil}_{\text{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie [Lemma 40.4](#) des Skripts, also die folgenden Aussagen:

- (a) Für Mengen $E_1, E_2 \subseteq V$ gilt

$$E_1 \subseteq E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2^\perp \subseteq E_1^\perp. \quad (40.3)$$

- (b) Für eine Menge $E \subseteq V$ gilt

$$E^\perp = \langle E \rangle^\perp. \quad (40.4)$$

Übungsaufgabe II-12.2. (Komposition/Inverse von Homomorphismen von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform)

Es seien $(U, \gamma_1), (V, \gamma_2), (W, \gamma_3)$ Vektorräume über demselben Körper mit **symmetrischen** Bilinearformen $\gamma_1 \in \text{Bil}(U, U)$, $\gamma_2 \in \text{Bil}(V, V)$ und $\gamma_3 \in \text{Bil}(W, W)$. Zeigen Sie [Satz 40.13](#) des Skripts, also die folgenden Aussagen:

- (a) Sind $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ Homomorphismen von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform, dann ist auch $g \circ f: U \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform.
- (b) Ist $f: U \rightarrow V$ ein Isomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform, dann ist auch $f^{-1}: V \rightarrow U$ Isomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform. Ist U endlich-dimensional, dann gilt außerdem $\text{Rang}(\gamma_1) = \text{Rang}(\gamma_2)$.