

ÜBUNG II - 12 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 29. Juni 2026

Übungsaufgabe II-12.1. (Orthogonalität)

Es seien V ein Vektorraum und $\gamma \in \text{Bil}_{\text{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie [Lemma 40.4](#) des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(a) Für Mengen $E_1, E_2 \subseteq V$ gilt

$$E_1 \subseteq E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2^\perp \subseteq E_1^\perp. \quad (40.3)$$

(b) Für eine Menge $E \subseteq V$ gilt

$$E^\perp = \langle E \rangle^\perp. \quad (40.4)$$

Lösung.

Aussage (a): Jeder Vektor $v \in V$ mit der Eigenschaft $v \perp_\gamma E_2$ erfüllt auch $v \perp_\gamma E_1$. Das zeigt $E_2^\perp \subseteq E_1^\perp$.

Aussage (b): Wegen $E \subseteq \langle E \rangle$ folgt $\langle E \rangle^\perp \subseteq E^\perp$ aus **Aussage (a)**. Es sei nun $w \in \langle E \rangle$, d. h., es gibt eine endliche Menge $E_0 \subseteq E$ und Skalare α_v für $v \in E_0$, sodass

$$w = \sum_{v \in E_0} \alpha_v v$$

gilt. Aufgrund der Linearität im zweiten Argument der Bilinearform γ gilt für jedes $u \in E^\perp$:

$$\gamma(u, w) = \gamma\left(u, \sum_{v \in E_0} \alpha_v v\right) = \sum_{v \in E_0} \alpha_v \underbrace{\gamma(u, v)}_0 = 0.$$

Das heißt aber: $u \perp_\gamma w$ für alle $w \in \langle E \rangle$, also $u \in \langle E \rangle^\perp$.

Übungsaufgabe II-12.2. (Komposition/Inverse von Homomorphismen von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform)

Es seien $(U, \gamma_1), (V, \gamma_2), (W, \gamma_3)$ Vektorräume über demselben Körper mit **symmetrischen** Bilinearformen $\gamma_1 \in \text{Bil}(U, U)$, $\gamma_2 \in \text{Bil}(V, V)$ und $\gamma_3 \in \text{Bil}(W, W)$. Zeigen Sie **Satz 40.13** des Skripts, also die folgenden Aussagen:

- (a) Sind $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ Homomorphismen von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform, dann ist auch $g \circ f: U \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform.
- (b) Ist $f: U \rightarrow V$ ein Isomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform, dann ist auch $f^{-1}: V \rightarrow U$ Isomorphismus von Vektorräumen mit symmetrischer Bilinearform. Ist U endlich-dimensional, dann gilt außerdem $\text{Rang}(\gamma_1) = \text{Rang}(\gamma_2)$.

Lösung.

Der Beweis folgt ganz analoger Struktur wie die bisherigen Beweise von Strukturverträglichkeiten. Dass die inversen Abbildungen zu linearen Bijektionen wieder linear sind haben wir in ?? bereits gesehen, es gilt also nur die Orthogonalität zu untersuchen.

- (a) Hier ist für beliebige $u \in U$ wegen der Orthogonalität der jeweiligen Homomorphismen

$$\gamma_3((g \circ f)(u), (g \circ f)(u)) = \gamma_3((g(f(u)), (g(f(u))) = \gamma_2(f(u), f(u)) = \gamma_1(u, u).$$

- (b) Hier ist

$$\gamma_1(f^{-1}(v_1), f^{-1}(v_2)) = \gamma_2(f(f^{-1}(v_1)), f(f^{-1}(v_2))) = \gamma_2(v_1, v_2) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Bezüglich beliebiger Basis B_U und dazugehörigem $B_V := f(B_U)$ von U respektive V gilt weiterhin, dass

$$\mathcal{M}_{B_U^* \leftarrow B_U}(\gamma_1) = \mathcal{M}_{B_U^* \leftarrow B_U}(\gamma_2(f(\cdot), f(\cdot))) = \mathcal{M}_{B_V^* \leftarrow B_V}(\gamma_2)$$

und damit die Gleichheit der Ränge der Bilinearformen.