R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 11 (Lösung)

Ausgabedatum: 22. Juni 2026

Übungsaufgabe II-11.1. (Die lokal annullierenden Polynome bilden ein Ideal)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 37.3, also dass für $x \in K^n$ die Menge

$$J_{A,x} \coloneqq \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \widetilde{p}(A)\, x = 0 \right\} \tag{37.6}$$

ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal ist.

Lösung.

Offensichtlich liegt das Minimalpolynom μ_A in $J_{A,x}$, damit handelt es nicht um das Nullideal und ist insbesondere nicht leer.

Für $p, q \in J_{A,x}$ ist außerdem $(p(A) - q(A))x = p(A)x - q(A)x = 0 - 0 = 0$ und damit nach dem Untergruppenkriterium ist $J_{A,x}$ eine Untergruppe.

Für beliebige Polynome p und q aus $K[t]$ ist außerdem $p(A)q(A) = q(A)p(A) = (q \cdot p)(A)$, da in beiden Auswertungen nur skalierte Potenzen von A auftreten, die alle miteinander kommutieren. Für $p \in J_{A,x}$ und $q \in K[t]$ ist daher

$$(q \cdot p)(A)x = (q \cdot p)(A)x = (q(A)p(A))x = q(A)(p(A)x) = q(A)0 = 0.$$

Das zeigt zugleich die Ringeigenschaft, als auch die (beidseitige) Idealeigenschaft.

Übungsaufgabe II-11.2. (lokale Minimalpolynome eines Endomorphismus und seiner Darstellungsmatrizen)

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \mathrm{Endo}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$. Zeigen Sie, dass für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}. \tag{37.8}$$

gilt (Satz 37.5).

Lösung.

Auf Grund der Sätze 19.8 und 19.9 gilt für alle Polynome $p \in K[t]$:

$$p(f)(v) = \Phi_{B_V}(p(A)x) \quad \text{und} \quad \Phi_{B_V}^{-1}(p(f)(v)) = p(A)x$$

mit den Bijektionen $\Phi_{B_V} : K^n \to V$ und $\Phi_{B_V}^{-1} : V \to K^n$.

Damit ist für Polynome $p \in J_{f,v}$ und $q \in J_{A,x}$:

$$\begin{aligned} q(f)(v) &= \Phi_{B_V}(q(A)x) = \Phi_{B_V}(0) = 0, \\ p(A)(x) &= \Phi_{B_V}^{-1}(p(f)v) = \Phi_{B_V}^{-1}(0) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $J_{f,v} \subseteq J_{A,x}$ und $J_{f,v} \supseteq J_{A,x}$, also $J_{f,v} = J_{A,x}$. Die Erzeuger dieser Ideale sind nach Satz 31.8 bis auf Skalierung eindeutig bestimmt, und da die lokalen Minimalpolynome normiert sind stimmen diese überein.