

ÜBUNG II - 8 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 1. Juni 2026

Übungsaufgabe II-8.1. (Blockdiagonalgestalt der Darstellungsmatrix eines Endomorphismus)

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $L \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie [Satz 32.7](#), also die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (a) Es existieren f -invariante Unterräume $U_1, \dots, U_L$ der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt:

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_L. \quad (32.8)$$

- (b) Es existiert eine Basis B_V von V , sodass die Darstellungsmatrix von f die Blockdiagonalgestalt

$$\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f) = \begin{bmatrix} \overset{n_1}{A_{11}} & & & \overset{n_L}{A_{1L}} \\ & \overset{n_2}{A_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overset{n_L}{A_{LL}} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_L \end{matrix} \quad (32.9)$$

besitzt, wobei für die Blöcke $A_{jj} \in K^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, L$ gilt.

Lösung.

[Aussage \(a\)](#) $\Rightarrow$ [Aussage \(b\)](#): Die Unterräume U_j sind n_j -dimensional, besitzen also Basen B_{U_j} aus je n_j Vektoren. Wir konkatenieren diese Basen zu $B_V := B_{U_1} \parallel \dots \parallel B_{U_L}$. Dass es sich bei B_V um eine Basis handelt folgt direkt aus der direkten Summeneigenschaft der Unterräume U_j . In der Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_V \leftarrow B_V}(f)$ stehen dann spaltenweise in jeweils Blöcken der Länge n_j die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, damit sind die Spaltenanzahlen der Blöcke

geklärt. Zum Unterraum des Index j gehört also der Spaltenblock mit den Indizes $\llbracket \sum_{i=1}^{j-1} n_i + 1, \sum_{i=1}^{j-1} n_i + n_j \rrbracket$. Dass in diesem Spaltenblock alle Zeilen zu Indizes aus dem entsprechenden Komplement $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \llbracket \sum_{i=1}^{j-1} n_i + 1, \sum_{i=1}^{j-1} n_i + n_j \rrbracket$ nur Nullen enthalten folgt sofort daraus, dass die Unterräume f -invariant sind, für $v \in B_{U_j}$ also $f(v) \in U_j$ liegt und damit in $\langle B_{U_j} \rangle$ liegt. Da die Darstellung bezüglich B_V eindeutig ist, stimmt sie gerade mit der Linearkombination in U_j überein und beinhaltet damit nur Koeffizienten zu Basisvektoren aus B_{U_j} .

Aussage (b) $\Rightarrow$ Aussage (a): Wir teilen die Basis B_V gerade in die Teilfamilien

$$B_{U_j} = (B_V(k))_{k \in \llbracket \sum_{i=1}^{j-1} n_i + 1, \sum_{i=1}^{j-1} n_i + n_j \rrbracket}$$

auf und setzen $U_j := \langle B_{U_j} \rangle$. Dabei ergeben sich automatisch Unterräume deren direkte Summe den ganzen Vektorraum ergibt, siehe [Satz 14.17](#). Die Invarianz der Unterräume lässt sich direkt an der Blockstruktur ablesen, da

$$f(\langle B_{U_j} \rangle) = \langle f(B_{U_j}) \rangle \subseteq \langle B_{U_j} \rangle.$$