R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Lineare Algebra
Wintersemester 2025–Sommersemester 2026

Übung II - 7

Ausgabedatum: 25. Mai 2026

Übungsaufgabe II-7.1. (Tensorprodukt zweier Algebren)

Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zwei (assoziative) K-Algebren für einen Körper K und mit zugehörigen K-Basen B_V, B_W.

(a) Zeigen Sie, dass der Tensorproduktraum $(V \otimes W, \oplus_\otimes, \odot_\otimes)$ mit der Abbildung, die durch bilineare Fortsetzung über

$$(v_1 \otimes w_1) \star_\otimes (v_2 \otimes w_2) \coloneqq (v_1 \star_V v_2) \otimes (w_1 \star_W w_2) \qquad \text{für } v_1 \otimes w_1 \text{ und } v_2 \otimes w_2 \text{ aus } B_V \otimes B_W$$

definiert ist, eine (assoziative) K-Algebra ist.

(b) Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zusätzlich Algebren mit Eins und nicht Nullalgebren. Zeigen Sie, dass

$$V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W \quad \text{und} \quad W \ni w \mapsto 1_V \otimes w \in 1_V \otimes W$$

Algebraisomorphismen zwischen Algebren mit Eins sind.

Übungsaufgabe II-7.2. (Polynomdivision)

Nutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $t^3 - 1$ und $t^3 - t^2 + t - 1$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ zu bestimmen.