

ÜBUNG II - 7 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 25. Mai 2026

Übungsaufgabe II-7.1. (Tensorprodukt zweier Algebren)

Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zwei (assoziative) K -Algebren für einen Körper K und mit zugehörigen K -Basen B_V, B_W .

- (a) Zeigen Sie, dass der Tensorproduktraum $(V \otimes W, \oplus_{\otimes}, \odot_{\otimes})$ mit der Abbildung, die durch bilineare Fortsetzung über

$$(v_1 \otimes w_1) \star_{\otimes} (v_2 \otimes w_2) := (v_1 \star_V v_2) \otimes (w_1 \star_W w_2) \quad \text{für } v_1 \otimes w_1 \text{ und } v_2 \otimes w_2 \text{ aus } B_V \otimes B_W$$

definiert ist, eine (assoziative) K -Algebra ist.

- (b) Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zusätzlich Algebren mit Eins und nicht Nullalgebren. Zeigen Sie, dass

$$V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W \quad \text{und} \quad W \ni w \mapsto 1_V \otimes w \in 1_V \otimes W$$

Algebraisomorphismen zwischen Algebren mit Eins sind.

Lösung.

- (a) Wir wissen bereits, dass $(V \otimes W, \oplus_{\otimes}, \odot_{\otimes})$ einen Vektorraum ergibt. Die Abbildung \star_{\otimes} ist per Definition bilinear, es bleibt also nur zu zeigen, dass $(V \otimes W, \oplus_{\otimes}, \star_{\otimes})$ ein Ring ist.

Dass $(V \otimes W, \oplus_{\otimes})$ eine abelsche Gruppe ist, wissen wir schon aus der Vektorraumeigenschaft. Die Distributivgesetze sind Teil der Bilinearität von \star_{\otimes} im Tensorproduktraum, es verbleibt also nur die Assoziativität von \star_{\otimes} zu prüfen, damit $(V \otimes W, \star_{\otimes})$ eine Halbgruppe ergibt.

Zuerst zeigen wir, dass für beliebige $v^1 \otimes w^1$ und $v^2 \otimes w^2$ aus $V \otimes W$ (nicht nur aus $B_V \otimes B_W$) ebenfalls $v^1 \otimes w^1 \star_{\otimes} v^2 \otimes w^2 = (v^1 \star_V v^2) \otimes (w^1 \star_W w^2)$ gilt. Es gilt nämlich mit den Basisdarstellungen dieser Vektoren

$$v^{1/2} = \sum_{i_{1/2}=1}^{n_V} \alpha_{i_{1/2}}^{1/2} v_{i_{1/2}} \quad \text{und} \quad w^{1/2} = \sum_{j_{1/2}=1}^{n_W} \beta_{j_{1/2}}^{1/2} w_{j_{1/2}}$$

mit v_i, w_j aus B_V bzw. B_W :

$$\begin{aligned} (v^1 \otimes w^1) \star_{\otimes} (v^2 \otimes w^2) &= \left(\sum_{i_1=1}^{n_V} \alpha_{i_1}^1 v_{i_1} \otimes \sum_{j_1=1}^{n_W} \beta_{j_1}^1 w_{j_1} \right) \star_{\otimes} \left(\sum_{i_2=1}^{n_V} \alpha_{i_2}^2 v_{i_2} \otimes \sum_{j_2=1}^{n_W} \beta_{j_2}^2 w_{j_2} \right) \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{n_V} \sum_{j_1=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 (v_{i_1} \otimes w_{j_1}) \right) \star_{\otimes} \left(\sum_{i_2=1}^{n_V} \sum_{j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_2} \otimes w_{j_2}) \right) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1, j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_1} \otimes w_{j_1}) \star_{\otimes} (v_{i_2} \otimes w_{j_2}) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1, j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_1} \star_V v_{i_2}) \otimes (w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1, j_2=1}^{n_W} (\alpha_{i_1}^1 v_{i_1} \star_V \alpha_{i_2}^2 v_{i_2}) \otimes (\beta_{j_1}^1 w_{j_1} \star_W \beta_{j_2}^2 w_{j_2}) \\ &= (v^1 \star_V v^2) \otimes (w^1 \star_W w^2). \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft wird an der rot markierten Stelle in der kommenden Umformung für den Nachweis der Assoziativität benötigt. Für deren Nachweis seien nun Tensoren

$$t_i = \sum_{j_i=1}^k \alpha_{j_i}^i (v_{j_i} \otimes w_{j_i}), \quad i = 1, 2, 3$$

gegeben mit $v_j \otimes w_j$ aus $B_V \otimes B_W$. Dann ist auf Grund der Assoziativität von \star_V und \star_W und der Bilinearität der Ringmultiplikationen:

$$\begin{aligned} (t_1 \star_{\otimes} t_2) \star_{\otimes} t_3 &= \left(\sum_{j_1=1}^k \alpha_{j_1}^1 (v_{j_1} \otimes w_{j_1}) \star_{\otimes} \sum_{j_2=1}^k \alpha_{j_2}^2 (v_{j_2} \otimes w_{j_2}) \right) \star_{\otimes} \sum_{j_3=1}^k \alpha_{j_3}^3 (v_{j_3} \otimes w_{j_3}) \\ &= \left(\sum_{j_1, j_2=1}^k \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 (v_{j_1} \otimes w_{j_1} \star_{\otimes} v_{j_2} \otimes w_{j_2}) \right) \star_{\otimes} \sum_{j_3=1}^k \alpha_{j_3}^3 (v_{j_3} \otimes w_{j_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{j_1, j_2=1}^k \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 (v_{j_1} \star_V v_{j_2} \otimes w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \right) \star_{\otimes} \sum_{j_3=1}^k \alpha_{j_3}^3 (v_{j_3} \otimes w_{j_3}) \\
 &= \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^k \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_3}^3 (v_{j_1} \star_V v_{j_2} \otimes w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \star_{\otimes} (v_{j_3} \otimes w_{j_3}) \\
 &= \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^k \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_3}^3 ((v_{j_1} \star_V v_{j_2}) \star_V v_{j_3} \otimes (w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \star_W w_{j_3}) \\
 &= \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^k \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_3}^3 (v_{j_1} \star_V (v_{j_2} \star_V v_{j_3}) \otimes w_{j_1} \star_W (w_{j_2} \star_W w_{j_3})) \\
 &= \dots \\
 &= t_1 \star_{\otimes} (t_2 \star_{\otimes} t_3)
 \end{aligned}$$

wobei die fehlenden Zwischenschritte die gleichen Transformationen wie vorher rückgängig machen.

- (b) Für beide Räume sind die Argumente analog zueinander, wir zeigen also nur die Aussagen für die Einbettung von V in $V \otimes W$. Als erstes ist dafür zu zeigen, dass $(V \otimes 1_W, \oplus_{\otimes}, \odot_{\otimes}, \star_{\otimes})$ eine unitäre K -Unteralgebra von $(V \otimes W, \oplus_{\otimes}, \odot_{\otimes}, \star_{\otimes})$ ist, also dass sowohl Unterraum als auch Unterringstruktur (mit Eins) vorliegt.

Wir verwenden das Unterraumkriterium und prüfen, ob die $0 \in V \otimes W$ in $V \otimes 1_W$ liegt, was sie tut, nämlich in Form von $0_V \otimes 1_W$, was auf Grund der Bilinearität des Tensorprodukts \otimes der Nulltensor im Tensorproduktraum sein muss. Abgeschlossenheit bezüglich der Vektorraumverknüpfungen folgt ebenfalls aus der Bilinearität, denn für Skalare $\alpha \in K$ und $v_1 \otimes 1_W$ und $v_2 \otimes 1_W$ ist

$$\alpha \odot_{\otimes} (v_1 \otimes 1_W) \oplus_{\otimes} v_2 \otimes 1_W = ((\alpha \odot_V v_1) \otimes 1_W) \oplus_{\otimes} v_2 \otimes 1_W = ((\alpha \odot_V v_1) \oplus_V v_2) \otimes 1_W \in V \otimes 1_W.$$

Da wir die Untergruppeneigenschaft mit der Unterraumeigenschaft schon mitgezeigt haben verbleibt von der Unterringeigenschaft lediglich die Abgeschlossenheit bezüglich \star_{\otimes} , welche man anhand Definition von \star_{\otimes} , beziehungsweise dem oben gezeigten Verhalten auf einfachen Tensoren, und der Neutralität von 1_W bezüglich \star_W einsieht, denn es ist

$$(v_1 \otimes 1_W) \star_{\otimes} (v_2 \otimes 1_W) = (v_1 \star_V v_2) \otimes (1_W \star_W 1_W) = (v_1 \star_V v_2) \otimes 1_W \in V \otimes 1_W.$$

Weiterhin ist $1_V \otimes 1_W$ wegen

$$(v \otimes w) \star_{\otimes} (1_V \otimes 1_W) = (v \star_V 1_V) \otimes (w \star_W 1_W) = v \otimes w$$

das neutrale Element in der Algebra $V \otimes W$ und liegt damit auch in beiden Unteralgebren. Die Unteralgebren-eigenschaft liegt also auch im Sinne von Algebren mit Eins vor.

Es bleibt die Strukturverträglichkeit zu zeigen und Invertierbarkeit von $f: V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W$ zu zeigen. Für die Strukturverträglichkeit seien $\alpha \in K$ und $v_1, v_2 \in V$. Dann ist (wieder wegen der Bilinearität des Tensorprodukts)

$$\begin{aligned} f(\alpha \odot_V v_1 \oplus_V v_2) &= (\alpha \odot_V v_1 \oplus_V v_2) \otimes 1_W = \alpha \odot_{\otimes} (v_1 \otimes 1_W) \oplus_{\otimes} (v_2 \otimes 1_W) = \alpha \odot_{\otimes} f(v_1) \oplus_{\otimes} f(v_2) \\ f(v_1 \star_V v_2) &= (v_1 \star_V v_2) \otimes 1_W = (v_1 \star_V v_2) \otimes (1_W \star_W 1_W) = (v_1 \otimes 1_W) \star_{\otimes} (v_2 \otimes 1_W) = f(v_1) \star_{\otimes} f(v_2). \end{aligned}$$

Es bleibt die Invertierbarkeit von f zu zeigen. Diese liegt genau dann vor, wenn $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$, also wenn genau dann $f(v) = v \otimes 1_W = 0_{\otimes}$ ist, wenn $v = 0_V$ ist. Da $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ oder $w = 0$ und $1_W \neq 0_W$ wegen der Nichtnullalgebrenvoraussetzung muss $v = 0_V$ sein.

Dass $1_V \mapsto 1_V \otimes 1_W = 1_{\otimes}$ ist, ist offensichtlich, damit haben wir Algebrenisomorphie im Sinne mit Einsen.

Übungsaufgabe II-7.2. (Polynomdivision)

Nutzen Sie den **euklidischen Algorithmus**, um den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $t^3 - 1$ und $t^3 - t^2 + t - 1$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ zu bestimmen.

Lösung.

Anwendung der Polynomdivision mit Rest auf die Eingangspolynome $t^3 - t^2 + t - 1$ und $t^3 - 1$ liefert

$$\begin{array}{r} t^3 - t^2 + t - 1 = (t^3 - 1)1 - t^2 + t \\ - t^3 \qquad \qquad + 1 \\ \hline - t^2 + t \end{array}$$

also den ersten Quotienten $q_1 = (1)$ und den ersten Rest $r_1 = (-t^2 + t)$.

Teilt man weiter $t^3 - 1$ durch den ersten Rest $r_1 = -t^2 + t$, dann erhält man

$$\begin{array}{r} t^3 \qquad \qquad - 1 = (-t^2 + t)(-t - 1) + t - 1 \\ - t^3 + t^2 \\ \hline t^2 \\ - t^2 + t \\ \hline t - 1 \end{array}$$

also den zweiten Quotienten $q_2 = (-t - 1)$ und den zweiten Rest $r_2 = (t - 1)$.

Teilt man weiter den ersten Rest $r_1 = -t^2 + t$ durch den zweiten Rest $r_2 = (t - 1)$, dann erhält man

$$\begin{array}{r} -t^2 + t = (t - 1) - t \\ \underline{t^2 - t} \\ 0 \end{array}$$

also den dritten Quotienten $q_3 = (-t)$ und den dritten Rest $r_3 = (0)$, hier ging die Division also restfrei auf und der größte gemeinsame Teiler ist entsprechend der zweite Rest $r_2 = (t - 1)$.