R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 6

Ausgabedatum: 18. Mai 2026

Übungsaufgabe II-6.1. (der Polynomring ist ein kommutativer Ring mit Eins)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie Lemma 28.2, also die folgenden Aussagen.

(a) Der Polynomring $((R^{\mathbb{N}_0})_{00}, +, \cdot)$ ist ebenfalls ein kommutativer Ring mit Eins.
Das Nullelement ist das **Nullpolynom**[1] $(0, 0, \ldots)$.
Das additive Inverse eines Polynoms erhalten wir durch Negation aller Koeffizienten.
Das Einselement ist das **Einspolynom**[2] $(1, 0, 0, \ldots)$.

(b) Die Abbildung

$$i \colon R \ni \alpha_0 \mapsto (\alpha_0, 0, 0, \ldots) \in (R^{\mathbb{N}_0})_{00} \tag{28.3}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Übungsaufgabe II-6.2. (Eigenschaften von Modulhomomorphismen, vgl. Lemma 17.6)

Es seien M_1, M_2 Moduln über demselben kommutativen Ring R. Weiter sei $f \colon M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 29.9, also die folgenden Aussagen:

(a) $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, f(a_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in R$ und $a_i \in M_1$.

(b) Ist $U \subseteq M_1$ ein Untermodul, dann ist $f(U) \subseteq M_2$ ein Untermodul.

(c) Ist $V \subseteq M_2$ ein Untermodul, dann ist $f^{-1}(V) \subseteq M_1$ ein Untermodul.

[1] englisch: zero polynomial
[2] englisch: constant one polynomial