R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 6 (Lösung)

Ausgabedatum: 18. Mai 2026

Übungsaufgabe II-6.1. (der Polynomring ist ein kommutativer Ring mit Eins)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie Lemma 28.2, also die folgenden Aussagen.

(a) Der Polynomring $((R^{\mathbb{N}_0})_{00}, +, \cdot)$ ist ebenfalls ein kommutativer Ring mit Eins.
Das Nullelement ist das **Nullpolynom**[1] $(0, 0, \ldots)$.
Das additive Inverse eines Polynoms erhalten wir durch Negation aller Koeffizienten.
Das Einselement ist das **Einspolynom**[2] $(1, 0, 0, \ldots)$.

(b) Die Abbildung

$$i\colon R \ni \alpha_0 \mapsto (\alpha_0, 0, 0, \ldots) \in (R^{\mathbb{N}_0})_{00} \tag{28.3}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Lösung.

(a) Alle Informationen sind in der Aussage enthalten und ergeben sich direkt aus der Definition der Verknüpfungen im Polynomring.

(b) Die Homomorphismeneigenschaft folgt direkt aus der Definition der Polynomverknüpfungen und die Injektivität folgt direkt aus der Gleichheit im Bildraum wenn alle Einträge übereinstimmen.

Übungsaufgabe II-6.2. (Eigenschaften von Modulhomomorphismen, vgl. Lemma 17.6)

Es seien M_1, M_2 Moduln über demselben kommutativen Ring R. Weiter sei $f\colon M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Lemma 29.9, also die folgenden Aussagen:

[1] englisch: zero polynomial
[2] englisch: constant one polynomial

(a) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f(a_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in R$ und $a_i \in M_1$.

(b) Ist $U \subseteq M_1$ ein Untermodul, dann ist $f(U) \subseteq M_2$ ein Untermodul.

(c) Ist $V \subseteq M_2$ ein Untermodul, dann ist $f^{-1}(V) \subseteq M_1$ ein Untermodul.

Lösung.

Alle Beweise folgen Schritt für Schritt der Struktur der analogen Aussagen in Vektorräumen, es gilt lediglich festzustellen, dass das Untermodulkriterium ganz analog zum Unterraumkriterium ist.