R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 5

Ausgabedatum: 11. Mai 2026

Übungsaufgabe II-5.1. (Flow chart zur Determinantenbestimmung)

Wir haben verchiedene Möglichkeiten gesehen, Determinanten von Matrizen in $K^{n\times n}$ zu berechnen. Erstellen Sie ein Flussdiagramm, dass Ihren Entscheidungsprozess, welche Art von Matrizen Sie auf welche Weise behandeln, darstellt.

Übungsaufgabe II-5.2. (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel)

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)
$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ u & v & w & i & j \\ x & y & z & k & l \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$ der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 123 & 145 & 167 \\ 267 & 245 & 223 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und bezüglich $\mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(d) Verwenden Sie die Cramersche Regel um die zweite Komponente x_2 der Lösung des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe II-5.3. (Total unimodulare Matrizen)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt **total unimodular**, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert in $\{-1, 0, 1\}$ hat.

(a) Geben Sie an, welche Werte die Einträge total unimodularer Matrizen haben können.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untermatrix beliebiger Dimension einer total unimodularen Matrix ebenfalls total unimodular ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$ total unimodular, dann ist die Blockmatrix $[A, B] \in \mathbb{R}^{m\times(n_1+n_2)}$ total unimodular.

(d) Zeigen Sie, dass für eine total unimodulare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ auch die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m\times n+m}$$

total unimodular ist.

Übungsaufgabe II-5.4. (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums)

(a) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist K mit $\leqslant$ ein geordneter Körper, dann sind die positiven Zahlen $P \coloneqq \{x \in K \mid x > 0\}$ abgeschlossen bzgl. der Körperoperationen und für jedes $y \in K$ gilt genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$.

(ii) Gibt es eine Menge $P \subseteq K$, die bezüglich der Körperoperationen abgeschlossen ist, so dass für jedes $y \in K$ genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$ gilt, dann ist K mit $x \leqslant y :\Leftrightarrow y - x \in P \vee x = y$ ein geordneter Körper.

Beachte: Einen Körper können wir also äquivalent darüber ordnen, dass wir die Ordnung direkt angeben, oder darüber, dass wir die positiven Zahlen kennzeichnen.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Basen des $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung $\leqslant$ untereinander umgekehrt/gleichorientiert sind:

$$B_1 \coloneqq (1, 1+t, 1+t+t^2), \quad B_2 \coloneqq (1+t, 1, 1+t+t^2), \quad B_3 \coloneqq (3+3t, 2, -1-t-t^2), \quad B_4 \coloneqq (1+2t, 3+5t^2, t)$$